QA
36
.E56
v.5
pt.2

Band V 1. Heft 2.

ENCYKLOPÄDIE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN
IM AUFTRAGE DER AKADEMIEN DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN, LEIPZIG, MÜNCHEN UND WIEN
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

IN SIEBEN BÄNDEN.

BAND I:	ARITHMETIK U. ALGEBRA, IN 2 TEILEN	RED. VON W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— II:	ANALYSIS, IN 2 TEILEN.	H. BURKHARDT IN ZÜRICH UND W. WIRTINGER IN WIEN.
— III:	GEOMETRIE, IN 3 TEILEN.	W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— IV:	MECHANIK, IN 2 TEILEN	F. KLEIN IN GÖTTINGEN UND C. H. MÜLLER IN GÖTTINGEN.
— V:	PHYSIK, IN 2 TEILEN.	A. SOMMERFELD IN AACHEN.
— VI, 1:	GEODÄSIE UND GEOPHYSIK . .	PH. FURTWÄNGLER IN BONN UND E. WIECHERT IN GÖTTINGEN.
— VI, 2:	ASTRONOMIE	K. SCHWARZSCHILD IN GÖTTINGEN.
— VII:	HISTORISCHE, PHILOSOPHISCHE UND DIDAKTISCHE FRAGEN BEHANDELND.	REDAKTION NOCH NICHT BESTIMMT.

BAND V 1. HEFT 2.

E. W. HOBSON IN CAMBRIDGE UND H. DIESSELHORST IN BERLIN: WÄRMELEITUNG.
M. SCHRÖTER IN MÜNCHEN UND L. PRANDTL IN GÖTTINGEN: TECHNISCHE THERMODYNAMIK

AUSGEGEBEN AM 5. OKTOBER 1905.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1905.

☞ Auf Beschluß der Akademie-Kommission werden von jetzt ab die Hefte steif broschiert und beschnitten ausgegeben.

☞ Jeder Band ist einzeln käuflich. — Bisher erschien: Bd. I (vollständig); Bd. II$_1$, Heft 1—5; Bd. II$_2$, Heft 1; Bd. III$_2$, Heft 1—2; Bd. III$_3$, Heft 1—3; Bd. IV$_1$, Heft 1—3; Bd. IV$_{1,\text{II}}$, Heft 1; Bd. IV$_2$, Heft 1—2; Bd. V$_1$, Heft 1—2; Bd. V$_2$, Heft 1.

☞ Einbanddecken in Halbfranz werden auf Bestellung mit dem Schlußheft eines jeden Bandes zu wohlfeilen Preisen von der Verlagsbuchhandlung geliefert.

Unter der Presse:

Band II	Teil 1.		Funktional-Operationen und -Gleichungen. Von **S. Pincherle** in Bologna.
- III.	- 1.		Die Begriffe „Linie“ und „Fläche“. Von **H. v. Mangoldt** in Danzig. — Prinzipien der Geometrie. Von **F. Enriques** in Bologna. — Gegensatz von synthetischer und analytischer Geometrie in seiner historischen Entwickelung. Von **G. Fano** in Turin.
- III.	- 2.		Abzählende Methoden. Von **G. H. Zeuthen** in Kopenhagen.
- IV.	- 2.		Besondere Ausführungen über unstetige Bewegungen in Flüssigkeiten. Von **G. Zemplén** in Budapest. — Hydraulik. Von **Ph. Forchheimer** in Graz.
- V.	- 1.		Chemische Atomistik. Von **F. W. Hinrichsen** in Aachen und **L. Mamlock** in Berlin. — Kristallographie. Von **Th. Liebisch** in Göttingen, **A. Schoenflies** und **O. Mügge** in Königsberg.
- VI.	- 1.		Niedere Geodäsie. Von **C. Reinhertz** in Hannover.
- VI.	- 2.		Über Koordinaten und Zeit. Von **E. Anding** in München. — Reduktion der astronomischen Beobachtungen. Von **Fritz Cohn** in Königsberg. — Geographische Ortsbestimmung, nautische Astronomie. Von **C. W. Wirtz** in Straßburg i. E. — Theorie der Uhren. Von **L. Ed. Caspari** in Paris.

Aufgabe der Encyklopädie ist es, in knapper, zu rascher Orientierung geeigneter Form, aber mit möglichster Vollständigkeit eine Gesamtdarstellung der mathematischen Wissenschaften nach ihrem gegenwärtigen Inhalt an gesicherten Resultaten zu geben und zugleich durch sorgfältige Literaturausgaben die geschichtliche Entwicklung der mathematischen Methoden seit dem Beginn des 19. Jahrhunderts nachzuweisen. Sie beschränkt sich dabei nicht auf die sogenannte reine Mathematik, sondern berücksichtigt auch ausgiebig die Anwendungen auf Mechanik und Physik, Astronomie und Geodäsie, die verschiedenen Zweige der Technik und andere Gebiete, und zwar in dem Sinne, daß sie einerseits den Mathematiker orientiert, welche Fragen die Anwendungen an ihn stellen, andererseits den Astronomen, Physiker, Techniker darüber orientiert, welche Antwort die Mathematik auf diese Fragen gibt. In 7 Bänden werden die einzelnen Gebiete in einer Reihe sachlich angeordneter Artikel behandelt; jeder Band soll ein ausführliches alphabetisches Register enthalten. Auf die Ausführung von Beweisen der mitgeteilten Sätze muß natürlich verzichtet werden. — Die Ansprüche an die Vorkenntnisse der Leser sollen so gehalten werden, daß das Werk auch demjenigen nützlich sein kann, der nur über ein bestimmtes Gebiet Orientierung sucht. — Eine von den beteiligten gelehrten Gesellschaften niedergesetzte Kommission, z. Z. bestehend aus den Herren

W. v. Dyck-München, **G. v. Escherich**-Wien, **O. Hölder**-Leipzig, **F. Klein**-Göttingen, **V. v. Lang**-Wien, ferner **L. Boltzmann**-Wien, **H. v. Seeliger**-München, **H. Weber**-Straßburg,

steht der Redaktion, die aus den Herren

H. Burkhardt-Zürich, **Ph. Furtwängler**-Bonn, **F. Klein**-Göttingen, **W. Fr. Meyer**-Königsberg, **C. H. Müller**-Göttingen, **K. Schwarzschild**-Göttingen, **A. Sommerfeld**-Aachen, **E. Wiechert**-Göttingen und **W. Wirtinger**-Wien

besteht, zur Seite. — Als Mitarbeiter an der Encyklopädie beteiligen sich ferner die Herren

I. Band:

W. Ahrens-Magdeburg
P. Bachmann-Weimar
J. Bauschinger-Berlin
G. Bohlmann-Berlin
L. v. Bortkewitsch-Berlin
H. Burkhardt-Zürich
E. Czuber-Wien
W. v. Dyck-München
D. Hilbert-Göttingen
O. Hölder-Leipzig
G. Landsberg-Breslau
R. Mehmke-Stuttgart
W. Fr. Meyer-Königsberg
E. Netto-Gießen
V. Pareto-Lausanne
A. Pringsheim-München
K. Runge-Göttingen
A. Schoenflies-Königsberg
H. Schubert-Hamburg
D. Seliwanoff-St. Petersburg
E. Study-Bonn
K. Th. Vahlen-Greifswald
H. Weber-Straßburg
A. Wiman-Lund.

II. Band:

M. Böcher-Cambridge, Mass.
G. Brunel †
H. Burkhardt-Zürich
G. Faber-Würzburg
R. Fricke-Braunschweig
H. Hahn-Wien
J. Harkness-Bryn Mawr
K. Hensel-Marburg [Coll., Pa.
A. Kneser-Breslau
A. Krazer-Karlsruhe
L. Maurer-Tübingen
W. Fr. Meyer-Königsberg
W. F. Osgood-Cambridge, [Mass.
P. Painlevé-Paris
S. Pincherle-Bologna
A. Pringsheim-München
A. Sommerfeld-Aachen
E. Vessiot-Lyon
A. Voss-München
A. Wangerin-Halle
E. v. Weber-München
J. Wellstein-Straßburg
W. Wirtinger-Wien
E. Zermelo-Göttingen.

III. Band:

R. Berzolari-Pavia
H. Burkhardt-Zürich
G. Castelnuovo-Rom
M. Dehn-Münster
F. Dingeldey-Darmstadt
F. Enriques-Bologna
G. Fano-Turin
C. Guichard-Clermont-Ferrand
P. Heegard-Kopenhagen
K. Heun-Karlsruhe
G. Kohn-Wien
H. Liebmann-Leipzig
R. v. Lilienthal-Münster
H. v. Mangoldt-Danzig
W. Fr. Meyer-Königsberg
E. Müller-Wien
J. Neuberg-Lüttich
E. Papperitz-Freiberg i. S.
K. Rohn-Leipzig
G. Scheffers-Darmstadt
A. Schoenflies-Königsberg
C. Segre-Turin
M. Simon-Straßburg
J. Sommer-Danzig
P. Stäckel-Hannover
O. Staude-Rostock
H. Steinitz-Charlottenburg
A. Voss-München
E. Wälsch-Brünn
H. G. Zeuthen-Kopenhagen
K. Zindler-Innsbruck.

IV. Band:

M. Abraham-Göttingen
L. Boltzmann-Wien
C. Cranz-Berlin
S. Finsterwalder-München
O. Fischer-Leipzig
Ph. Forchheimer-Graz
Ph. Furtwängler-Bonn
M. Grübler-Dresden
L. Henneberg-Darmstadt
K. Heun-Karlsruhe
G. Jung-Mailand
F. Klein-Göttingen
A. Kriloff-Petersburg
H. Lamb-Manchester
A. E. H. Love-Oxford
J. Petersen-Kopenhagen
L. Prandtl-Göttingen
A. Schoenflies-Königsberg
A. Sommerfeld-Aachen
P. Stäckel-Hannover
O. Tedone-Genua
E. Timerding-Elsfleth i. O.
A. Voss-München
G. T. Walker-Simla (Indien)
G. Zemplén-Budapest.

V. Band:

M. Abraham-Göttingen
L. Boltzmann-Wien
G. H. Bryan-Bangor (Wales)
Th. Descoudres-Leipzig
H. Diesselhorst-Berlin
S. Finsterwalder-München
R. Gans-Tübingen
F. W. Hinrichsen-Aachen
E. W. Hobson-Cambridge
H. H. van t'Hoff-Berlin
H. Kamerlingh-Onnes-Leiden
Th. Liebisch-Göttingen
H. A. Lorentz-Leiden
L. Mamlock-Berlin
G. Mie-Greifswald
H. Minkowski-Göttingen
O. Mügge-Königsberg
F. Pockels-Heidelberg
L. Prandtl-Göttingen
R. Reiff-Stuttgart
K. Runge-Göttingen
A. Schoenflies-Königsberg
M. Schröter-München
A. Sommerfeld-Aachen
E. Study-Bonn
A. Wangerin-Halle
W. Wien-Würzburg
J. Zenneck-Danzig.

VI, 1. Band:

R. Bourgeois-Paris
G. H. Darwin-Cambridge
S. Finsterwalder-München
H. Hergesell-Straßburg
S. Hough-Kapstadt
H. Meldau-Bremen
J. M. Pernter-Wien
P. Pizzetti-Pisa
C. Reinhertz-Hannover
A. Schmidt-Potsdam
W. Trabert-Wien
E. Wiechert-Göttingen.

VI, 2. Band:

E. Anding-München
J. Bauschinger-Berlin
E. W. Brown-Haverford
L. Caspari-Paris
C. V. L. Charlier-Lund
F. Cohn-Königsberg
R. Emden-München
F. K. Ginzel-Berlin
J. v. Hepperger-Wien
H. Herglotz-Göttingen
H. Kobold-Kiel
F. R. Moulton-Chicago
G. v. Niessl-Brünn
S. Oppenheim-Prag
E. v. Oppolzer-Innsbruck
F. Ristenpart-Berlin
L. Schulhof-Paris
K. Schwarzschild-Göttingen
K. Sundmann-Helsingfors
E. T. Whittaker-Cambridge
C. W. Wirtz-Straßburg
H. v. Zeipel-Pulkowa.

Band V: Physik, in 2 Teilen. Redigiert von A. Sommerfeld in Aachen.

* erschienen, † unter der Presse.

I. Teil.

Vorwort zu Band V von **A. Sommerfeld** in Aachen.
Inhaltsverzeichnis von Band V, Teil I.

A. Einleitung.

*1. Maß und Messen: **C. Runge** in Göttingen.
*2. Theorie der Gravitation: **J. Zenneck** in Danzig.

B. Thermodynamik.

*3. Allgemeine Grundlegung der Thermodynamik: **G. H. Bryan** in Bangor, Wales.
*4. Dissipation der Energie, insbesondere Wärmeleitung: **E. W. Hobson**-Cambridge u. **H. Dießelhorst**-Berlin.
*5. Technische Wärmetheorie: **M. Schröter** in München und **L. Prandtl** in Göttingen.

[Fortsetzung auf letzter Umschlagseite.]

V 4. WÄRMELEITUNG.

VON

E. W. HOBSON IN CAMBRIDGE. UND **H. DIESSELHORST** IN BERLIN.

Inhaltsübersicht.

I. Mathematischer Teil (Rechnungsmethoden). Von **E. W. Hobson.**

1. Allgemeines über Dissipation.
2. Die Grundlagen der Theorie der Wärmebewegung.
3. Die partielle Differentialgleichung der Wärmebewegung in einem isotropen festen Körper. Allgemeine Sätze.
4. Die Wärmeleitung in krystallinischen Körpern.
5. Die lineare Wärmeleitung.
6. Die Behandlung der linearen Wärmebewegung durch die Methode der Quellenpunkte.
7. Die Wärmeleitung in zwei oder drei Dimensionen.
8. Wärmeleitung in einer Kugel.
9. Wärmeleitung in einem Kreiscylinder.
10. Wärmeleitung in Körpern von verschiedenen speziellen Formen.
11. Theorie des Schmelzens und des Gefrierens bei Wärmeleitung.
12. Die Wärmeleitung und innere Reibung in einer bewegten Flüssigkeit.
13. Diffusion.

II. Physikalischer Teil (Messmethoden). Von **H. Diesselhorst.**

14. Zweck der Messungen.
15. Grundlagen und Voraussetzungen.
16. Allgemeine Übersicht über die Methoden.
17. Methode von *Péclet* (1841).
18. Wärmedurchgang durch Heizflächen.
19. Methode von *Berget* (1887).
20. Methode von *Despretz* (1822) und *Forbes* (1852).
21. Äussere Wärmeleitung.
22. Methode von *Angström* (1861).
23. Methoden von *Fr. Neumann* (1862).
24. Methode von *Kirchhoff* und *Hansemann* (1879).
25. Methode von *L. Lorenz* (1881).
26. Methoden aus dem Berliner physikalischen Institut (1898—1903).
    a. Bespülung der Endflächen mit einem Wasserstrahl.
    b. Bestrahlung der Endflächen mit einem glühenden Platinblech.
    c. Berechnung der nach diesen Methoden angestellten Versuche.

27. Isothermen-Methode von *Voigt* (1897).
28. Wärmeleitung in Krystallen. Allgemeines.
29. Methode von *H. de Sénarmont* (1847).
30. Methode von *Voigt* (1896).
31. Messungsergebnisse.

Litteratur.

J. B. Biot, Traité de physique 4, Paris 1816.
J. B. J. Fourier, Théorie analytique de la chaleur, Paris 1822. (Oeuvres 1.) Englisch von *Freeman,* Cambr. 1878, deutsch von *Weinstein,* Berlin 1884.
S. D. Poisson, Théorie mathématique de la chaleur, Paris 1835; supplément Paris 1837.
Ph. Kelland, Theory of Heat, Cambridge and London 1837.
G. Lamé, Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes, Paris 1857.
— Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications, Paris 1859.
— Leçons sur la théorie analytique de la chaleur, Paris 1861.
B. Riemann, Partielle Differentialgleichungen und deren Anwendung auf physikalische Fragen, von *Hattendorff* herausgegeben, 2. Aufl. Braunschweig 1876, 3. Aufl. 1882.
E. Mathieu, Cours de physique mathématique, Paris 1873.
E. Heine, Theorie der Kugelfunktionen und der verwandten Funktionen, Berlin 1861. 2. Aufl. Bd. 1, 1878, Bd. 2, 1881.
A. Dronke, Einleitung in die analytische Theorie der Wärmeverbreitung, nach *A. Beer* und *J. Plücker,* Leipzig 1882.
J. C. Maxwell, Theory of Heat, London 1883, neue Aufl. 1894.
Th. Liebisch, Physikalische Krystallographie, Kap. 3, Leipzig 1891.
F. Pockels, Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ und deren Auftreten in der mathematischen Physik, Leipzig 1891.
G. Kirchhoff, Vorlesungen über die Theorie der Wärme, herausgegeben von *M. Planck,* Leipzig 1894.
J. Boussinesq, Théorie analytique de la chaleur, Paris 1901.
H. Poincaré, Théorie analytique de la propagation de la chaleur, Paris 1895.
B. Riemann, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik, nach *Riemann*'s Vorlesungen neu bearbeitet von *Heinrich Weber,* Bd. 1 (1900), Bd. 2 (1901), Braunschweig.
H. v. Helmholtz, Vorlesungen über Theorie der Wärme, Leipzig 1903.
H. Burkhardt, Entwicklungen nach oscillierenden Funktionen, Bericht erstattet der D. Math.-Ver. (im Erscheinen begriffen in dem Jahresber. der D. Math.-Ver. 1903).

Bezeichnungen.

Q Wärmemenge.
$\mathfrak{Q}$ Vektor des Wärmestromes.
$\mathfrak{Q}_x, \mathfrak{Q}_y, \mathfrak{Q}_z$ Komponenten desselben.
u Temperatur.
$\varkappa$ Wärmeleitfähigkeit.

γ spezifische Wärme.
ϱ Dichte.
$k = \frac{\varkappa}{\varrho\gamma}$ Temperaturleitfähigkeit.
H äussere Wärmeleitfähigkeit (Konstante des *Newton*'schen Abkühlungsgesetzes).
$h = \frac{H}{\varkappa}$ äussere Temperaturleitfähigkeit.
h' äussere Temperaturleitfähigkeit eines linearen Leiters (im Teil II mit h bezeichnet; vgl. Nr. **5** und **15**).
$\varkappa_{11}, \varkappa_{12}, \ldots$ Konstanten der Wärmeleitung in einem Krystall.
$\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ die Hauptwärmeleitfähigkeiten.
k_1, k_2, k_3 die Haupttemperaturleitfähigkeiten.
$\omega_1, \omega_2, \omega_3$ die Konstanten des rotatorischen Wärmeflusses.

I. Mathematischer Teil (Rechnungsmethoden).

1. Allgemeines über Dissipation der Energie. Alle physikalischen Prozesse, welche ein System durchmachen kann, sind entweder 1) umkehrbare oder reversible Prozesse, oder 2) nicht umkehrbare oder irreversible Prozesse. Unter 1) versteht man solche Prozesse, die sich vollständig rückgängig machen lassen, derart, dass nicht nur der Endzustand des betreffenden Systems genau gleich ist dem Anfangszustand, sondern dass auch ausserhalb des Systems keine bleibende Änderung eingetreten ist. Unter 2) versteht man solche Vorgänge, welche keine derartige Umkehrung zulassen; bei diesen kann das System nicht in seinen früheren Zustand zurückgebracht werden, ohne dass ausserhalb des Systems eine dauernde Änderung verursacht worden ist. Die Erfahrung lehrt, dass alle Prozesse, welche in der Natur stattfinden, unter 2) fallen, nämlich, dass alle wirklichen Vorgänge nach einer bestimmten Richtung hin verlaufen, und dass die Mittel, welche uns zur Verfügung stehen, nicht hinreichen, irgend ein materielles System so zu leiten, dass es einen streng reversibeln Prozess durchmacht; ein reversibler Prozess ist also ein idealer Begriff, der nur als Grenzfall eines natürlichen Vorgangs zu betrachten ist.

Bei Zugrundelegung der beiden Prinzipien der Erhaltung der Energie und der Erhaltung der Masse, hat eine mechanische Beschreibung der Natur zum Ziel, die verschiedenen Formen, welche die Energie annimmt, zu klassifizieren und die Gesetze, welchen die Umwandlung der Energie von einer Form in eine andere unterworfen sind, zu ergründen. Die Erfahrung lehrt, dass unser thatsächliches Vermögen Energie zu leiten und für unsere Zwecke nutzbar zu machen, ein sehr verschiedenes ist, je nach der Form, in welcher die Energie auftritt;

namentlich über die Energie solcher verborgener Bewegungen, welche in den Molekülen der Materie stattfinden, ist unsere Macht viel geringer als über die Energie der Molarbewegungen. Prozesse, bei welchen die Quantität Energie, worüber wir verfügen können, beständig abnimmt, heissen dissipative Prozesse; die Verwandlung der Energie von einer Form in eine andere weniger nutzbare, oder auch eine Änderung in der Verteilung der Energie unter Beibehaltung ihrer Form, derart, dass ihre Nutzbarkeit abnimmt, heisst Dissipation der Energie[1]). Die Dissipation wird durch die quantitative Abnahme der nutzbaren Energie gemessen; bei jedem natürlichen Vorgang findet, wenn man die ganze Erscheinung in Betracht zieht, Dissipation in grösserem oder kleinerem Mass statt; eben deswegen kommt kein vollkommen reversibler Prozess in der Natur vor.

Der Begriff der Dissipation ist ein rein relativer; er bezieht sich nämlich auf unsere thatsächliche Macht über die Dinge[2]). Dissipirte Energie ist solche, die wir nicht beherrschen; nutzbare Energie ist hingegen solche, die wir in irgend eine erwünschte Bahn leiten können. In der mechanischen Wärmetheorie, aus welcher der Begriff der Dissipation entstanden ist, tritt das Prinzip der Dissipation im zweiten Hauptsatz der Thermodynamik auf, und nimmt in der Lehre von der Entropie (vgl. den vorangehenden Art. *Bryan*, Nr. **11—13**) eine bestimmte Form an.

Einer der wichtigsten dissipativen Prozesse ist die Wärmeleitung,

---

1) Die Erfahrungsthatsache der Dissipation hat Lord *Kelvin* (*W. Thomson*) in den folgenden Sätzen formuliert — siehe den Aufsatz „On a Universal Tendency in Nature to the Dissipation of Energy", Edinb. Proc. 3 (1852), p. 139 und Phil. Mag. 4 (1852), p. 258, 304, auch „Mathematical and Physical papers" 1, p. 511.

(1) There is at present in the material world a universal tendency to the dissipation of mechanical energy.

(2) Any restoration of mechanical energy, without more than an equivalent of dissipation, is impossible in inanimate material processes, and is probably never effected by means of organized matter, either endowed with vegetable life or subjected to the will of an animated creature.

(3) Within a finite period of time past, the earth must have been, and within a finite period of time to come the earth must again be unfit for habitation of man as at present constituted, unless operations have been or are to be performed, which are impossible under the laws to which the known operations going on at present in the material world are subject.

2) Über die Relativität des Begriffs der Dissipation vgl. eine Bemerkung von *Helmholtz*, J. f. Math. 100 (1887), p. 142, auch *Maxwell*, Encyclopaedia Britannica, 9. Aufl., Diffusion, p. 220. Siehe auch *Maxwell's* „Theory of Heat", p. 192.

bei welcher eine nicht umkehrbare Änderung in der Verteilung einer gewissen Art molekularer kinetischer Energie unter dem Bild einer Wärmeströmung aufgefasst wird. Die Erzeugung der Wärme durch Reibung und die Absorption von Wärme- oder Lichtstrahlen sind ebenfalls dissipative Vorgänge; die Dissipation tritt auch bei der Diffusion der Gase auf, einer Erscheinung, die sich nach den Prinzipien der kinetischen Gastheorie erklären lässt. Der Hauptgegenstand, der in diesem Artikel behandelt wird, ist die Wärmeleitung; die Verfolgung der anderen zahlreichen dissipativen Prozesse gehört in die verschiedenen Einzelgebiete der Physik und Chemie, welche sich mit diesen Prozessen befassen.

Ihrer mathematischen Behandlung nach weisen die verschiedenen dissipativen Vorgänge eine gewisse „Familienähnlichkeit“ auf, so dass ihre Theorie mehr oder minder enge an die Theorie der Wärmeleitung als den am längsten und besten bekannten Typus der dissipativen Prozesse angeschlossen werden kann. Dies gilt namentlich von der Elektrizitätsleitung und der Diffusion, welche letztere hier anhangweise zur Sprache kommen wird.

2. Die Grundlagen der Theorie der Wärmebewegung. Die der Hauptsache nach von *Fourier* begründete[3]) Theorie der Wärmebewegung befasst sich mit der aus der Erfahrung bekannten Thatsache, dass zwei Teile desselben Körpers, oder zwei mit einander in Berührung stehende Körper von verschiedener Temperatur, den bestehenden Temperaturunterschied allmählich ausgleichen, indem der wärmere Körper oder Körperteil kühler und der kühlere wärmer wird. Diese Erscheinung stellt man sich als eine Bewegung der Wärme vom wärmeren zum kühleren Körper vor. Man unterscheidet drei wesentlich verschiedene Vorgänge, durch welche der Übergang der Wärme von einer wärmeren an eine kühlere Stelle geschehen kann: 1) Strahlung, wenn die Körper von einander getrennt sind und das dazwischen liegende Medium von der Art ist, die man diatherman nennt; 2) Leitung, wenn die Körper sich berühren oder wenn die Wärmebewegung in einem athermanen Körper stattfindet; 3) Konvektion, wo in einem flüssigen Körper Strömungen der Materie durch die Temperaturunterschiede verursacht werden.

3) Als Vorgänger *Fourier*'s ist namentlich *J. B. Biot* zu nennen, der für den Fall des stationären Wärmeflusses den heutzutage meist nach *Fourier* benannten Ansatz bereits vollständig entwickelt hatte. Vgl. Mémoire sur la propagation de la chaleur, lu à la classe des sciences math. et phys. de l'Institut national (Bibl. britann. Sept. 1804, 27, p. 310), sowie Traité de phys. 4, p. 669, Paris 1816.

Der mechanischen Wärmelehre gemäss werden die Wärmeerscheinungen in einem athermanen Körper auf Bewegungen der Moleküle oder der Atome zurückgeführt; die Wärmeleitungstheorie wäre also innerhalb der mechanischen Naturauffassung als Theorie der Fortpflanzung der betreffenden molekularen Bewegungen zu klassifizieren; mit etwaiger Ausnahme der gasförmigen Körper reichen aber unsere gegenwärtigen Kenntnisse über die molekulare Beschaffenheit der Körper nicht aus, um einen solchen Weg gangbar erscheinen zu lassen. Als *Fourier*[4]), *Poisson*[5]) und andere die Wärmeleitungstheorie begründeten, existierte die mechanische Wärmetheorie im modernen Sinn noch nicht, und trotzdem diese seither eine in vielen Hinsichten recht erfolgreiche Entwickelung durchgemacht hat, sind wir doch nicht im Stande, eine rein mechanische Theorie der Wärmeleitung in festen oder in flüssigen Körpern aufzustellen. (Höchstens könnte man in diesem Zusammenhange darauf hinweisen, dass die „Hauptlösung" der Wärmleitungsgleichung (s. Nr. **6** und **7** dieses Art.) aufs Lebhafteste an die Verteilungsgesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung erinnert, auf welche ja fraglos die Fortpflanzung der Molekularbewegungen zu basieren sein würde.) Dementsprechend hat man in dieser Theorie verschiedene Hilfsbegriffe nötig, wenn man die betreffenden Erscheinungen überhaupt einer mathematischen Behandlung zugänglich machen will, d. h. wenn man viele Fälle einheitlich zusammenfassen und allgemeine Sätze aufstellen will. Ausserdem werden in der mathematischen Behandlung der Erscheinungen verschiedene Voraussetzungen gemacht[6]), welche sogar bei mässigen

---

4) *Fourier*'s Schriften über die Wärmetheorie nehmen ihren Anfang in einem im Jahre 1808 im Bull. des Sci. veröffentlichten Auszug aus einer im vorangehenden Jahre eingereichten Denkschrift (vgl. Oeuvres 2, p. VII). Im Jahre 1811 fasste *Fourier* eine Abhandlung mit dem Titel „Théorie du mouvement de la chaleur dans les corps solides" ab; dieselbe wurde aber erst in den Jahren 1824, 1826 in Par. Mém. 4, 5 veröffentlicht; weitere Schriften erschienen in Par. Mém. 7 (1827); 8 (1829); 12 (1833). Eine Reihe Schriften über die Wärmetheorie befinden sich auch in Ann. Chim. Phys. 3 (1816); 4 (1817); 6 (1817); 13 (1820); 27 (1824); 28 (1825); 37 (1828). In seinem im Jahre 1822 erschienenen Werke „Théorie analytique de la chaleur" hat *Fourier* den mathematischen Teil seiner Untersuchungen über Wärmeleitung zusammengefasst; seinen Plan, eine ergänzende „théorie physique" zu schreiben, hat er nicht ausgeführt.

5) *Poisson*'s Untersuchungen sind in seinem Werke „Théorie mathématique de la chaleur", Paris 1835, enthalten. Siehe auch J. éc. polyt. 12, cah. 19 (1823).

6) Eine Kritik der der *Fourier-Poisson*'schen Wärmeleitungstheorie zu Grunde liegenden Voraussetzungen giebt *W. Hergesell*, Ann. Phys. Chem. 15 (1882), p. 19; daselbst wird die Dehnung eines leitenden Körpers unter gewissen Voraussetzungen in Betracht gezogen. Ansätze zu einer solchen Kritik schon

Temperaturänderungen nur annähernd der wirklichen Erfahrung entsprechen; der Grad, in welchem die theoretischen Resultate den wirklichen Vorgängen entsprechen, kann nur durch Beobachtungen bestimmt werden; dass wir thatsächlich in vielen Fällen die erforderlichen Mittel besitzen, solche Vergleiche auszuführen, und den physikalischen Wert der höchstens nur annähernd richtigen mathematischen Theorie zu schätzen, wird im zweiten Teile dieses Artikels dargethan werden.

Der erste Begriff mit dem wir es zu thun haben, ist der der *Temperatur*, als Grösse betrachtet. Begrifflich wird die Temperatur in einem jeden Punkt eines Körpers durch ein unendlich kleines Thermometer ohne Wärmekapazität gemessen, welches an den betreffenden Punkt gebracht wird; die Temperatur in einem Punkt wird als Funktion sowohl der Lage des Punktes als auch der Zeit betrachtet.

Andere Begriffe, welche eine Hauptrolle in der Theorie spielen, sind die der *Wärmemenge* und die der *spezifischen Wärme.*

In der mechanischen Wärmelehre wird eine *Wärmemenge* durch eine Energiegrösse gemessen; wenn sie einem Körper oder Körperteilchen zugeführt wird, so wird ein Teil davon auf Temperaturerhöhung verwandt, der andere Teil wird aber in irgend eine andere Energieform verwandelt, oder auf Arbeitsleistung verbraucht, indem das Volumen des Körpers geändert wird. In der Wärmeleitungslehre hingegen wird vorläufig angenommen, dass, wenn eine Wärmemenge einem Körperteilchen zugeführt wird, ihre einzige Wirkung in einer Temperaturerhöhung des betreffenden Körperteilchens besteht, dass also keine Änderung des Volumens stattfindet und kein Umsatz in andere Energieformen Platz greift. Das Mass für die Wärmemenge ist in der Theorie der Wärmeleitung das kalorimetrische.

Wenn ein Körperteilchen von der Masse m eine unendlich kleine Wärmemenge δQ gewinnt, so bezeichnen wir die dadurch verursachte Temperaturerhöhung durch δu, wo u die ursprüngliche Temperatur des Teilchens darstellt; dann besteht die Gleichung $\delta Q = m\gamma\delta u$, wo

---

bei *Duhamel,* J. éc. polyt. cah. 25 (1837), p. 1; *J. Liouville,* J. de math. 2 (1837), p. 439; *Duhamel,* Par. sav. [étr.] 5 (1838), p. 440; J. éc. polyt. cah. 36 (1856), p. 1; *J. Amsler,* Schweiz. N. Denkschr. 12 (1852) (abgedr. J. f. Math. 42 (1851), p. 327).

Wärmeleitung unter Zugrundelegung des Dulong-Petit'schen (vgl. Anm. 12) statt des Newton'schen Erkaltungsgesetzes (s. Gl. (4)) für den Wärmeaustausch zwischen benachbarten Molekeln bei *G. Libri,* J. f. Math. 7 (1831), p. 116; *J. Liouville,* J. de math. 3 (1838), p. 350.

der Wert von γ im allgemeinen von u und von der Beschaffenheit des Stoffs abhängt. Die Grösse γ heisst die *spezifische Wärme* des Körperteilchens; es wurde von *Fourier* und seinen Nachfolgern angenommen, dass sie unabhängig von der Temperatur u sei; obgleich wir nun wissen, dass dies in Wirklichkeit nicht der Fall ist, nicht einmal unter der obigen Voraussetzung, dass das Volumen des Teilchens keine Änderung erleidet, wird *Fourier*'s Annahme doch meistens in der mathematischen Theorie beibehalten[7]).

Wenn eine Platte[8]) von isotropem homogenen Stoff durch zwei Ebenen von grosser Ausdehnung begrenzt ist, und die Temperaturen u_0, u_1 in diesen Ebenen konstant erhalten werden, so fliesst Wärme von der wärmeren (u_1) nach der kälteren Seite (u_0) durch die Platte; die Wärmemenge Q, die in der Zeit t durch die Platte hindurchgeht, ist proportional mit der Oberfläche F der Platte, proportional mit der Zeit t, und umgekehrt proportional mit der Dicke der Platte; da sie überdies verschwindet, wenn $u_0 = u_1$, so setzt man

$$Q = \varkappa \frac{u_1 - u_0}{d} Ft, \tag{1}$$

worin $\varkappa$ ein Faktor ist, der im allgemeinen eine Funktion der beiden Grenztemperaturen u_0, u_1 ist. Es wird nun als annähernd richtig angenommen, dass $\varkappa$ unabhängig ist von den Grenztemperaturen, und nur vom Material der Platte abhängt; $\varkappa$ heisst die (innere) Leitungsfähigkeit der Substanz der Platte.

Im Falle eines athermanen Stoffes macht man weiter die Annahme, dass ein Wärmeaustausch nur zwischen unmittelbar an einander grenzenden Teilen des Körpers stattfindet, man schliesst also die Wärmestrahlung auf endliche Entfernungen gänzlich aus. Wenn δF eine kleine ebene Fläche ist, welche einen Punkt P eines solchen Körpers enthält, und δQ die Wärmemenge bezeichnet, welche in der Zeit δt durch δF hindurchfliesst, so heisst der Grenzwert von

$$\frac{\delta Q}{\delta F \delta t},$$

wenn δQ, δt, δF unendlichklein werden, der *Wärmestrom im Punkt P senkrecht zur Oberfläche* δF. Durch Betrachtung der Wärmemengen, welche durch die Oberflächen eines unendlich kleinen Tetraeders fliessen, in Verbindung mit der Annahme, dass Wärme weder zerstört noch in andere Energieformen umgewandelt wird, kann man sodann zeigen, dass der Wärmestrom ein *Vektor* ist, dass also der Wärme-

7) Ein Ansatz zur Behandlung des allgemeinen Falles bei *Fourier*, Par. mém. 8 (1829), Oeuvres 2, p. 180.

8) Vgl. *Fourier*, „Théorie", chap. I, sect. IV, sowie *Biot* (l. c. Anm. 3).

strom in der Richtung (l, m, n) gleich $l\mathfrak{Q}_x + m\mathfrak{Q}_y + n\mathfrak{Q}_z$ ist, worin $\mathfrak{Q}_x$, $\mathfrak{Q}_y$, $\mathfrak{Q}_z$ die Wärmeströme in den Richtungen der Koordinaten und l, m, n die Richtungskoeffizienten bezeichnen. Man nennt die Resultante von $\mathfrak{Q}_x$, $\mathfrak{Q}_y$, $\mathfrak{Q}_z$ *den Wärmestrom* $\mathfrak{Q}$ *im Punkte* (x, y, z); die absolute Grösse dieses Vektors misst die Intensität des Wärmestromes; $\mathfrak{Q}_x$, $\mathfrak{Q}_y$, $\mathfrak{Q}_z$ heissen die *Komponenten des Wärmestroms.*

Es wird vorausgesetzt, dass die Temperatur u im Punkte (x, y, z) zur Zeit t im allgemeinen eine stetige Funktion der Koordinaten x, y, z, t ist, welche stetige differentiierbare Derivierte nach diesen Koordinaten besitzt[9]); daraus folgt, dass zu einer jeden bestimmten Zeit t stetige Flächen existieren, auf welchen die Temperatur konstante Werte hat; diese Flächen heissen isotherme Flächen. Weiter folgt aus der Annahme, dass der Wärmestrom in einem Punkte nur von der Verteilung der Temperatur in der Umgebung des Punktes abhängt, dass in einem isotropen Körper der Wärmestrom immer senkrecht zu derjenigen isothermen Fläche gerichtet ist, auf welcher der betreffende Punkt liegt, und ferner, dass die Grösse des Wärmestroms durch $-\varkappa \partial u/\partial n$ ausgedrückt wird, wo dn ein Element der Normalen zur isothermen Fläche bezeichnet. Der Ausdruck $-\partial u/\partial n$ misst das Temperaturgefälle; *der Wärmestrom kommt also dem Produkt aus Temperaturgefälle und Leitungsfähigkeit gleich.* Da auch das Temperaturgefälle ein Vektor ist, so sind die Komponenten des Wärmestroms $\mathfrak{Q}$:

$$(2) \qquad (\mathfrak{Q}_x, \mathfrak{Q}_y, \mathfrak{Q}_z) = \left(-\varkappa \frac{\partial u}{\partial x}, \quad -\varkappa \frac{\partial u}{\partial y}, \quad -\varkappa \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Wenn zwei verschiedene Körper sich an einer Grenzfläche berühren, erleiden im allgemeinen die Komponenten des Wärmestromes einen Sprung an der Grenzfläche, aber die Komponenten in der Richtung der Normale haben in beiden Körpern denselben Wert. Von *Fourier* wird ausserdem angenommen, dass die Temperatur an der Grenzfläche keinen Sprung macht; die beiden Grenzbedingungen sind unter dieser Voraussetzung

$$(3) \qquad u = u', \quad l\varkappa \frac{\partial u}{\partial x} + m\varkappa \frac{\partial u}{\partial y} + n\varkappa \frac{\partial u}{\partial z} = l\varkappa' \frac{\partial u'}{\partial x} + m\varkappa' \frac{\partial u'}{\partial y} + n\varkappa' \frac{\partial u'}{\partial z},$$

worin $\varkappa$, $\varkappa'$ die Leitungsfähigkeit der beiden Körper, u, u' ihre Tempe-

9) Selbstverständlich ist diese Voraussetzung mit der Vorstellung vom molekularen Aufbau der Materie strenge genommen unvereinbar, wie überhaupt die Behandlung der physikalischen Erscheinungen in ponderabeln Körpern mittels partieller Differentialgleichungen gewisse prinzipielle Schwierigkeiten aufweist. Vgl. hierzu *G. Prasad,* Constitution of Matter and Analytical Theories of Heat. Göttinger Abhdlgen. (Neue Folge) 2 (1903) Nr. 4; insbesondere Part. II und III.

raturen, l, m, n die Richtungskoeffizienten der Normale im Punkte (x, y, z) der Grenzfläche bedeuten. Von *Poisson*[10]) wird die erste der obigen Bedingungen allgemeiner gefasst; er nimmt an, dass an der Grenzfläche zweier fester Körper, ähnlich wie man für die Grenzfläche eines festen Körpers und einer Flüssigkeit (vgl. Gl. (4)) anzusetzen pflegt:

$$l\varkappa\frac{\partial u}{\partial x}+m\varkappa\frac{\partial u}{\partial y}+n\varkappa\frac{\partial u}{\partial z}=l\varkappa'\frac{\partial u'}{\partial x}+m\varkappa'\frac{\partial u}{\partial y}+n\varkappa'\frac{\partial u}{\partial z}=q(u-u'),$$

wo q eine von der Beschaffenheit der beiden Körper in der Nähe der Grenzfläche abhängige Grösse ist. Mit $q=\infty$ folgen hieraus im besonderen die Gl. (3).

Wenn ein fester Körper von Luft oder von einer anderen Flüssigkeit umgeben ist, so wird die Wärmemenge, welche vom Körper an die Flüssigkeit oder umgekehrt abgegeben wird, zum Teil durch Leitung, zum Teil durch Strahlung an der Grenzfläche bedingt; es werden aber auch Bewegungen in der Flüssigkeit entstehen, und daher die Temperaturänderungen in der Nähe der Fläche zum Teil durch Konvektion hervorgerufen werden. Diese komplizierten Vorgänge der Berechnung zu unterwerfen wäre unmöglich ohne eine Hypothese, die die Wirkung aller drei Prozesse einigermassen richtig zusammenfasst. Man macht die Hypothese, dass die Wärmemenge, welche durch ein Flächenelement δF in der Zeit δt strömt, proportional mit $(u-u_0)\delta F\delta t$ ist, wo u die Temperatur des festen Körpers, u_0 diejenige der Flüssigkeit in der Nähe des Elements δF bedeutet; dieser Hypothese gemäss lautet die Bedingung an der Grenzfläche[11])

$$-\varkappa\frac{\partial u}{\partial n}=H(u-u_0), \tag{4}$$

worin dn ein Element der nach der Flüssigkeit gerichteten Normale bedeutet, und H eine von der Beschaffenheit der beiden Substanzen abhängige Grösse ist, welche die äussere Leitungsfähigkeit des Körpers genannt wird. Diese Gleichung soll die Gesamtwirkung von Leitung, Strahlung und Konvektion darstellen, und drückt das sogenannte *Newton'sche Gesetz der Abkühlung* aus; dasselbe kann jedoch nur als eine erste Näherung bei hinreichend kleinem Temperaturunterschiede $u-u_0$ gelten. *Dulong* und *Petit* haben zuerst versucht, dasselbe unter Ausschluss von Wärmestrahlung durch eine auf Beobachtung basierte Formel zu ersetzen[12]). Die Wärmeabgabe durch Strahlung

10) *Poisson,* „Théorie", p. 127; J. éc. polyt. cah. 19, p. 107.

11) *Fourier,* „Théorie", chap. II, sect. VII.

12) *Dulong* und *Petit,* Annal. chim. phys. 7 (1817), p. 225, 337; Einführung

andrerseits wird nach dem heutigen Stande der Wissenschaft durch das *Stefan*'sche Gesetz[13]) gegeben, wobei man der Wärmeabgabe nach *Dulong* und *Petit* diejenige nach *Stefan* zu überlagern hat. (Vgl. hierzu Nr. **21** dieses Art.)

3. Die partielle Differentialgleichung der Wärmebowegung in einem isotropen festen Körper. Allgemeine Sätze. Bei Berücksichtigung der in Nr. **2** angegebenen Voraussetzungen und Definitionen ist es nun möglich, die partielle Differentialgleichung aufzustellen, welcher die Temperatur $u(x, y, z, t)$ im Inneren eines isotropen festen Körpers Genüge leistet. Es sei σ eine innerhalb des leitenden Körpers liegende geschlossene Fläche, γ die spezifische Wärme, ϱ die Dichtigkeit der Materie in einem Punkt auf oder innerhalb der Fläche σ. Da keine Wärme innerhalb σ erzeugt wird, so besteht die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint \gamma\varrho u\,dx\,dy\,dz = \iint \varkappa\left(l\frac{\partial u}{\partial x} + m\frac{\partial u}{\partial y} + n\frac{\partial u}{\partial z}\right)d\sigma,$$

worin l, m, n die Richtungskoeffizienten der auf $d\sigma$ nach innen gerichteten Normale bedeuten, das dreifache Integral sich auf den Raum innerhalb σ bezieht, und das doppelte Integral auf die Oberfläche von σ. Indem man das Flächenintegral durch ein Volumenintegral ersetzt, erhält man

$$\iiint\left\{\gamma\varrho\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right\}dx\,dy\,dz = 0.$$

Da die Fläche σ eine willkürliche ist, so muss in jedem Punkt innerhalb des leitenden Körpers die Gleichung

$$\gamma\varrho\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0 \tag{5}$$

erfüllt werden. Falls der Körper homogen ist, nimmt (5) die Form an

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right). \tag{6}$$

Die Konstante

$$k = \frac{\varkappa}{\gamma\varrho} \tag{7}$$

bezeichnet man als Temperaturleitvermögen, weil bei gegebenen Oberflächentemperaturen die räumliche und zeitliche Temperaturverteilung im Innern nur von ihr abhängt.

---

dieses Gesetzes in die Theorie der Wärmeleitung schon bei *Kelland*, Theory of heat, Nr. 73, p. 69.

13) *J. Stefan*, Wien. Ber., Math. phys. Kl. 79 (1879), p. 391.

Die Gleichung (5) resp. (6) ist die zuerst von *Fourier* aufgestellte *Bewegungsgleichung der Wärme* in einem leitenden Körper.

In der mathematischen Wärmeleitungstheorie handelt es sich hauptsächlich darum, ein Integral dieser partiellen Differentialgleichung zu finden, welches gegebenen Oberflächenbedingungen an der Grenze des Körpers genügt, wobei die Form des betreffenden Körpers und der thermische Anfangszustand desselben vorgeschrieben wird.

Wenn bei der Wärmebewegung die Temperatur in jedem Punkt (x, y, z) unabhängig von der Zeit ist, so heisst die Bewegung stationär; in diesem Falle lautet die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial z}\right)=0, \tag{8}$$

oder, wenn der Körper homogen ist,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\Delta u=0. \tag{9}$$

Die Differentialgleichung (8) resp. (9) ist dieselbe, wie sie auch in der Elektrostatik vorkommt, und die spezielle Form (9) ist die Grundgleichung in der Theorie des Gravitationspotentials. Die Bestimmung der stationären Temperatur in einem Körper bei gegebener Oberflächentemperatur fällt also mit der *Green'schen Aufgabe der gewöhnlichen Potentialtheorie* zusammen.

Für die allgemeinere Gleichung (6) der veränderlichen Wärmebewegung lassen sich *allgemeine Sätze* aufstellen, welche bekannten Sätzen der gewöhnlichen Potentialtheorie entsprechen. Es seien u, u' beliebige Funktionen, welche der Beschränkung unterliegen, innerhalb eines gegebenen Raumes S nebst ihren ersten Derivierten nach x, y, z von $t=0$ bis $t=t_1$ (mit ev. Ausschluss dieser Grenzen selbst) stetig zu sein; es lässt sich leicht beweisen, dass[14])

$$\int_0^{t_1} dt \int dS\left[u'\left(\frac{\partial u}{\partial t}-k\Delta u\right)+u\left(\frac{\partial u'}{\partial t}+k\Delta u'\right)\right]$$

$$=\int\{(uu')_{t_1}-(uu')_0\}\,dS+\int_0^{t_1} dt\int k\left(u'\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial u'}{\partial n}\right)d\sigma;$$

die Integration nach S ist durch den Raum S zu erstrecken, dn ist

14) Diese Formel und die nachfolgenden Anwendungen bei *B. Minnigerode* „Über Wärmeleitung in Krystallen", Diss. Göttingen 1862. Vgl. auch *J. Amsler,* J. f. Math. 42 (1851), p. 316, 327; *E. Beltrami,* Mem. Acc. Bologna (4) 8 (1887), p. 291; *E. Betti,* Mem. Soc. Ital. 40 (3), 1^2; *A. Sommerfeld,* Math. Ann. 45 (1899), p. 263. Über den stationären Temperaturzustand siehe *K. von der Mühll,* Math. Ann. 2 (1870), p. 643.

ein nach dem Inneren von S gezogenes Element der Normale zum Oberflächenelement $d\sigma$.

Wenn nun u der Differentialgleichung (6) genügt, und wenn u' die „adjungierte“ Gleichung[15])

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + k\Delta u' = 0$$

erfüllt und sich für $\lim t = t_1$ dem Wert

$$\frac{1}{(2\sqrt{\pi k(t_1 - t)})^3}\, e^{-\frac{(x-x')^2+(y-y)^2+(z-z')^2}{4k(t_1-t)}}$$

nähert, so lässt sich beweisen, indem man den Punkt (x', y', z') durch eine kleine Oberfläche umhüllt und den von ihr eingeschlossenen Raum von der Integration S ausschliesst, dass der Wert $u(x', y', z', t_1)$ von u im Punkt (x', y', z') durch

$$u(x', y', z', t_1) = \int (uu')_{t=0}\, dS + \int_0^{t_1} dt \int k\left(u\frac{\partial u'}{\partial n} - u'\frac{\partial u}{\partial n}\right) d\sigma$$

dargestellt wird. Anstatt u' führe man die Funktion $v(t) = u'(t_1 - t)$ ein; v genügt der Gleichung (6) und nähert sich für $\lim t = 0$ dem Wert

$$\frac{1}{(2\sqrt{\pi k t})^3}\, e^{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}{4kt}}.$$

Um nun die Temperatur $u(x', y', z', t_1)$ im Punkte $(x' y' z')$ zu bestimmen, wenn die Temperatur U der Oberfläche σ von S gegeben ist, muss man den Bedingungen, welchen v genügt, noch diejenige hinzufügen, dass v an der Oberfläche σ verschwinden soll. In diesem Fall erhalten wir

$$(10)\quad u(x', y', z', t_1) = \int u_0 v(t_1)\, dS + \int_0^{t_1} dt \int U \frac{\partial}{\partial n} v(t_1 - t)\, d\sigma;$$

diesem Resultat gemäss reduziert sich die Bestimmung von u auf die Bestimmung einer Funktion v, welche den obigen einfacheren Bedingungen zu genügen hat. Ist an der Oberfläche von S nicht die Temperatur des Körpers selbst, sondern die Temperatur U der Umgebung gegeben, so dass u der Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial n} = h(u - U), \quad h = \frac{H}{\varkappa}$$

15) In Bezug auf Randwertaufgaben im allgemeinen, sowie wegen des Begriffs der adjungierten Differentialgleichung vgl. Art. *Sommerfeld* (II A 7c, Nr. **4**, **9**, **10**, **14**).

zu genügen hat, so bestimme man v derart, dass an der Oberfläche

$$\frac{\partial v}{\partial n} = hv;$$

in diesem Fall wird u durch die Gleichung

$$(10') \quad u(x', y', z', t_1) = \int u_0 v(t_1)\, dS + \int_0^{t_1} dt \int h U v(t_1 - t)\, d\sigma$$

ausgedrückt.

Die Funktion v spielt hier eine ähnliche Rolle, wie die *Green'sche Funktion in der gewöhnlichen Potentialtheorie*; sie stellt die Temperatur dar, die zur Zeit t_1 an der Stelle (x', y', z') vorhanden ist, wenn zur Zeit $t = 0$ die Temperatur von S überall Null war und nur an der Stelle (x, y, z) einen unendlich grossen Wert hatte, vorausgesetzt, dass im ersten der obigen Fälle die Temperatur der Oberfläche, im zweiten die der Umgebung stets gleich Null ist.

Aus diesen Resultaten folgt leicht, dass es nicht zwei verschiedene Funktionen u geben kann, welche den ihnen auferlegten gleichen Bedingungen genügen, dass also die Lösung des Problems durch jene Bedingungen eindeutig festgelegt ist. Übrigens lässt sich der Eindeutigkeitsbeweis auch führen, ohne dass dabei, wie es im Vorstehenden geschah, die Existenz der „Green'schen Funktion" v vorausgesetzt wird[16]).

Aus der partiellen Differentialgleichung (6) schliesst man, wenn die Oberflächentemperatur von S stets Null ist:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int u^2\, dS = -\int k \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right\} dS;$$

ist nicht die Oberflächentemperatur selbst, sondern die Temperatur der Umgebung Null, so gilt dieselbe Gleichung bei Hinzufügung von $-h\int u^2\, dS$ auf der rechten Seite. Daraus folgt, dass $\int u^2\, dS$ in beiden Fällen beständig abnimmt, wenn t ins Unendliche wächst; die Grenze, der sich diese positive Grösse dabei nähert, *kann keine andere als Null sein.*

Die lineare Form der Wärmebewegungsgleichung zeigt unmittelbar, dass eine Summe von Lösungen abermals eine Lösung der Gleichung ist; wenn man also Lösungen so zusammensetzen kann, dass ihre Summe den Grenzbedingungen Genüge leistet, so ist letztere die (eindeutig bestimmte) Lösung der betreffenden Aufgabe. Man darf

16) Vgl. z. B. *Riemann-Weber,* Part. Differentialgl. II, p. 86; *Heine,* Kugelfunktionen 2, p. 307—312.

dabei den einzelnen Gliedern der Summe irgend welche Grenzbedingungen auferlegen, welche mit den Bedingungen verträglich sind, denen die Summe genügen soll. Ein wichtiges Beispiel dieser *Methode der Zusammensetzung von Lösungen* besteht darin, dass die Temperatur u in der Form einer Reihe $\sum u_r f_r(t)$ dargestellt wird, worin die Funktionen u_r unabhängig von t sind; aus der Differentialgleichung folgt dann, dass die Funktionen $f(t)$ die Form haben müssen $Ae^{-\alpha t}$, wo A und α Konstante, und dass die Funktionen u_r der Differentialgleichung

$$k\Delta u + \alpha u = 0$$

genügen müssen. Diese Darstellung eignet sich besonders für den Fall, in welchem der Körper seine Wärme an ein umgebendes Medium abgiebt, dessen Temperatur konstant und, was keine weitere Beschränkung der Allgemeinheit bedeutet, gleich Null angenommen werden möge; schreibt man in diesem Falle

$$u = \sum A_r e^{-\alpha_r t} u_r,^{17})$$

so müssen die Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r, \ldots$ aus der Oberflächenbedingung

$$\frac{\partial u_r}{\partial n} - h u_r = 0$$

bestimmt werden. Es lässt sich durch Anwendung der Differentialgleichung leicht beweisen, dass

$$(11) \quad (\alpha_r - \alpha_s)\iiint \gamma \varrho u_r u_s \, dx\, dy\, dz = \iint \varkappa \left(u_s \frac{\partial u_r}{\partial n} - u_r \frac{\partial u_s}{\partial n}\right) d\sigma;$$

da nun die rechte Seite durch Wahl der α zum Verschwinden gebracht ist, so wird

$$\iiint \gamma \varrho u_r u_s \, dx\, dy\, dz = 0;$$

auch den Wert von

$$\iiint \gamma \varrho u_r^2 \, dx\, dy\, dz$$

kann man in speziellen Fällen aus Gl. (11) entnehmen, indem man zur Grenze $\alpha_r = \alpha_s$ übergeht. Wenn die Anfangstemperatur $\Phi(x, y, z)$ gegeben ist, so lässt sie sich unter gewissen zu ermittelnden Beschränkungen in die Form entwickeln

17) Lösungen von der Form $e^{-\alpha t} u$ nennt *Kelvin* (*W. Thomson*) „harmonic solutions", Mathematical and physical Papers 2, p. 50. Die Funktionen u_r heissen Normalfunktionen, vgl. das Buch von *F. Pockels*, „Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$", Leipzig 1891, p. 93. Siehe auch *H. Poincaré*, Par. C. R. 107 (1888), p. 967 und Par. C. R. 104, p. 1754.

$$\Phi(x, y, z) = A_1 u_1 + A_2 u_2 + \cdots + A_r u_r + \cdots,$$

wo A_r den Wert

$$\frac{\iiint \gamma \varrho u_r \Phi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz}{\iiint \gamma \varrho u_r^2\, dx\, dy\, dz}$$

hat[18]). Unter der angegebenen Grenzbedingung kann man mit Hilfe des Lehrsatzes

$$\iiint \gamma \varrho u_r u_s\, dx\, dy\, dz = 0$$

beweisen, dass alle α reell sind[19]), da ja, wenn komplexe und daher auch konjugiert komplexe α möglich wären, die linke Seite der vorigen Gleichung positiv ausfallen müsste, wenn man für u_r, u_s die zu konjugierten α gehörigen Funktionen u wählt. Ist dagegen die Temperatur des umgebenden Mediums variabel, so werden bei einem analogen Ansatz der Lösung die α im allgemeinen komplex.

Es habe ein leitender Körper die Anfangstemperatur Null und die Oberflächentemperatur $\Phi(t)$; wenn $\Phi(t) = 1$, so sei die Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$u = \Psi(x, y, z, t).$$

Dann lässt sich die Temperatur für allgemeine Werte von $\Phi(t)$ durch Zusammensetzung finden. *Es gilt nämlich*[20])

$$u = \Phi(0)\, \Psi(x, y, z, t) + \int_0^t \Phi'(t')\, \Psi(x, y, z, t - t')\, dt'$$

oder anders geschrieben

$$u = \int_0^t \Phi(t') \frac{d}{dt}\, \Psi(x, y, z, t - t')\, dt'. \tag{12}$$

Man kann auf ähnliche Weise verfahren, wenn der Körper sich durch Strahlung in ein umgebendes Medium mit der Temperatur $\Phi(t)$ abkühlt.

Bei vielen Aufgaben ist es zweckmässig, drei geeignet gewählte *orthogonale Koordinaten* h_1, h_2, h_3 als Raumkoordinaten anstatt der cartesischen anzuwenden; h_1, h_2, h_3 sind Parameter von drei Flächen,

18) Derartig allgemeine Koeffizientenbestimmungen scheinen zuerst von *J. R. Merian* bei einem hydrodynamischen Problem ausgeführt zu sein, Basel 1828, umgearbeitet von *K. Vondermühll,* Math. Ann. 27 (1886), p. 575.

19) *Poisson,* „Théorie", p. 178, 179; auch *Duhamel,* J. éc. polyt. 14, cah. 22 (1833).

20) Diese Methode hat im Anschluss an *Fourier,* Par. mém. 8 (1829) (Oeuvres 2, p. 161) im wesentlichen *Duhamel* gegeben J. éc. polyt. 14, cah. 22 (1833), p. 34; vgl. auch *Heine,* „Kugelfunktionen" 2, p. 311—314.

die sich im Punkt (x, y, z) orthogonal schneiden und welche je einer Flächenschar angehören. Die umgestaltete partielle Differentialgleichung der Wärmebewegung lautet[21]), wenn h_1, h_2, h_3, t als unabhängige Variabele gewählt werden,

$$\gamma\varrho\frac{\partial u}{\partial t} = H_1 H_2 H_3 \left\{\frac{\partial}{\partial h_1}\left(\varkappa\frac{H_1}{H_2 H_3}\frac{\partial u}{\partial h_1}\right) + \frac{\partial}{\partial h_2}\left(\varkappa\frac{H_2}{H_3 H_1}\frac{\partial u}{\partial h_2}\right) + \frac{\partial}{\partial h_3}\left(\varkappa\frac{H_3}{H_1 H_2}\frac{\partial u}{\partial h_3}\right)\right\},$$

worin H_1 den Wert von

$$\left\{\left(\frac{\partial h_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial h_1}{\partial z}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

bedeutet, und H_2, H_3 entsprechende Werte in Bezug auf h_2, h_3 haben; die Länge des Linienelementes

$$ds = \{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2\}^{\frac{1}{2}}$$

lässt sich in der Form

$$\left\{\left(\frac{dh_1}{H_1}\right)^2 + \left(\frac{dh_2}{H_2}\right)^2 + \left(\frac{dh_3}{H_3}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

ausdrücken.

Bei Aufgaben der Wärmeleitungslehre mag in Bezug auf die Grenzbedingungen bemerkt werden, dass man es an einer Grenzfläche im allgemeinen nicht mit dem Funktionswert selbst, sondern mit dem *Grenzwert der Funktion* zu thun hat. Wenn z. B. die Temperatur an der Oberfläche eines leitenden Körpers gegeben ist, so ist zu bewirken, dass $\lim u(x, y, z, t)$, wenn x, y, z gegen ihre Werte in einem Punkt der Oberfläche konvergieren, dem gegebenen Oberflächenwert gleich wird. Ebenso ist bei gegebener Anfangstemperatur $u_0(x, y, z)$ lediglich zu verlangen, dass $\lim u(x, y, z, t)$ für $t = 0$ gleich der Anfangstemperatur u_0 werde, während $u(x, y, z, 0)$ gegebenenfalls von u_0 verschieden ausfallen kann. Die Funktion $u_0(x, y, z)$ kann an einzelnen Flächen oder in einzelnen Punkten Unstetigkeiten erleiden, während die Funktion $u(x, y, z, t)$ für alle positive Werte von t doch stetig ist[22]).

Wenn der Temperaturzustand eines leitenden Körpers zu einer bestimmten Zeit gegeben ist, so kann man die Frage aufwerfen, *ob*

21) Diese Transformation rührt von *Lamé* her, J. éc. polyt. 14, cah. 23 p. 191, auch „Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs applications", Paris 1857. Sie wurde auch von *Kelvin* (*W. Thomson*) gefunden Cambr. Math. J. 4 (1843), p. 33, und „Mathematical and physical Papers" 1, p. 25. Vgl. auch *Heine*, „Kugelfunktionen", p. 303—308.

22) *K. Weierstrass*, Berl. Sitzungs-Ber. (1885) p. 803; speziell mit Rücksicht auf die Wärmeleitung: *A. Sommerfeld*, Die willkürlichen Funktionen in der mathem. Physik. Diss. Königsberg 1891, *G. Prasad*, Göttinger Abhdlgn. (Neue Folge) 2 (1903) Nr. 4.

diese Temperaturverteilung aus einer früheren Verteilung durch Wärmeleitung entstanden sein kann. Die Antwort auf diese Frage ist, dass eine solche frühere Wärmeverteilung nicht immer existiert, aber dass sie sich in sehr allgemeinen Fällen eindeutig bestimmen lässt. Im Fall der linearen Leitung hat *P. Appell*[23]) eine hinreichende aber nicht notwendige Bedingung für die Existenz einer solchen vorhergehenden Wärmeverteilung aufgestellt. Jedenfalls lässt sich die Temperaturfunktion, wenn sie nicht konstant ist, niemals unendlich weit in die Vergangenheit zurückführen, ohne dass sie aufhört zu existieren oder endlich zu sein.

4. Die Wärmeleitung in krystallinischen Körpern. Wenn die Wärmeleitung in einem Krystall[24]) stattfindet, darf man im allgemeinen nicht annehmen, dass die Richtung des Wärmestromes senkrecht zu der isothermen Fläche liegt. Mit Rücksicht auf die Erfahrungsthatsache, dass der Wärmestrom durch jedes Flächenelement nur von der Temperaturverteilung in der nächsten Umgebung desselben abhängt, ist die einfachste Annahme die, dass die Komponenten des Wärmestroms sich als lineare Funktionen der Komponenten des Temperaturgefälles ausdrücken lassen, dass also

$$\mathfrak{Q}_x = -\varkappa_{11}\frac{\partial u}{\partial x} - \varkappa_{12}\frac{\partial u}{\partial y} - \varkappa_{13}\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\mathfrak{Q}_y = -\varkappa_{21}\frac{\partial u}{\partial x} - \varkappa_{22}\frac{\partial u}{\partial y} - \varkappa_{23}\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\mathfrak{Q}_z = -\varkappa_{31}\frac{\partial u}{\partial x} - \varkappa_{32}\frac{\partial u}{\partial y} - \varkappa_{33}\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Hierin bedeuten $(\mathfrak{Q}_x, \mathfrak{Q}_y, \mathfrak{Q}_z)$ die Komponenten des Wärmestromes, und die $\varkappa$ Konstanten, welche von der Beschaffenheit des Mediums abhängen; es wird gewöhnlich angenommen, dass diese Konstanten unabhängig sind von der Temperatur u; diese neun Konstanten heissen Konstanten der Wärmeleitungsfähigkeit. Die obigen Gleichungen haben

---

23) J. de math. (4) 8 (1892), p. 187. Siehe auch *Kelvin*, Cambr. Math. J. 4 (1843), p. 67, oder „Mathematical and physical Papers" 1, p. 39.

24) Die Wärmeleitung in Krystallen hat *Duhamel* zuerst behandelt, J. éc. polyt. 13, cah. 21 (1832), p. 356; 19 (1848), p. 155; Par. C. R. 25 (1842), p. 842; ebenda 27 (1848), p. 27. Siehe auch *P. O. Bonnet*, Par. C. R. 27 (1848), p. 49; *B. Minnigerode*, N. Jahrb. f. Mineralogie 1 (1886), p. 1; *P. Morin*, Par. C. R. 66 (1868), p. 1332; *M. J. Moutier*, Bull. soc. phil. (7) 8 (1884), p. 134; *Kelvin*, Math. and phys. Papers 1, p. 282. Eine gute Darstellung des Gegenstandes ist im Lehrbuch von *Liebisch*, „Physikalische Krystallographie", Leipzig 1891, zu finden.

Duhamel und *Lamé*[25]) durch Betrachtung des Austausches der Wärme unter benachbarten Molekülen begründet. Schreiben wir

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2}(\varkappa_{23} + \varkappa_{32}), \quad \lambda_2 = \tfrac{1}{2}(\varkappa_{31} + \varkappa_{13}), \quad \lambda_2 = \tfrac{1}{2}(\varkappa_{12} + \varkappa_{21}),$$
$$\mu_1 = \tfrac{1}{2}(\varkappa_{23} - \varkappa_{32}), \quad \mu_2 = \tfrac{1}{2}(\varkappa_{31} - \varkappa_{13}), \quad \mu_2 = \tfrac{1}{2}(\varkappa_{12} - \varkappa_{21}),$$
$$X = -\frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad Y = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial u}{\partial z},$$

so erhalten[26]) wir

$$(\mathfrak{Q}_x, \mathfrak{Q}_y, \mathfrak{Q}_z) = (\mathfrak{P}_x, \mathfrak{P}_y, \mathfrak{P}_z) + (\mathfrak{R}_x, \mathfrak{R}_y, \mathfrak{R}_z),$$

worin

$$\mathfrak{P}_x = \varkappa_{11} X + \lambda_3 Y + \lambda_2 Z, \qquad \mathfrak{R}_x = \mu_3 Y - \mu_2 Z,$$
$$\mathfrak{P}_y = \lambda_3 X + \varkappa_{22} Y + \lambda_1 Z, \qquad \mathfrak{R}_y = \mu_1 Z - \mu_3 X,$$
$$\mathfrak{P}_z = \lambda_2 X + \lambda_1 Y + \varkappa_{33} Z, \qquad \mathfrak{R}_z = \mu_2 X - \mu_1 Y.$$

Der Vektor $\mathfrak{P}$ hat die Richtung der Normale im Punkt (X, Y, Z) an das Ellipsoid

$$\varkappa_{11} x^2 + \varkappa_{22} y^2 + \varkappa_{33} z^2 + 2\lambda_1 yz + 2\lambda_2 zx + 2\lambda_3 xy = \text{const.};$$

die Grösse des Vektors ist gleich dem reziproken Werte des Abstands der Tangentialebene im Punkte X, Y, Z vom Mittelpunkte des Ellipsoids. Dieses Ellipsoid heisst das *Ellipsoid der linearen Leitungsfähigkeit*[27]); seine Hauptaxen liefern ein System ausgezeichneter Koordinatenaxen, welche als *Hauptaxen der Leitungsfähigkeit* bezeichnet werden können[28]). Der „rotatorische Vektor" $\mathfrak{R}$ ist gleich dem vektoriellen Produkt aus dem Radiusvektor (X, Y, Z) und dem durch

25) „Leçons sur la théorie anal. de la chal." In seiner Behandlung meint *Lamé* nicht angenommen zu haben, dass das Medium nach zwei entgegengesetzten Richtungen gleiche Wärmeleitungsfähigkeit besitzt; dass die Meinung irrig sei, hat *Minnigerode* in seiner Dissertation „Über Wärmeleitung in Krystallen", Göttingen 1862, bewiesen. Die Theorien von *Duhamel* und *Lamé* basieren auf einer Betrachtung des Wärmeaustausches unter benachbarten Molekülen. Dieselben Gleichungen kommen in den Theorien der Elektrizitätsströmungen, der dielektrischen und magnetischen Polarisation vor. Vgl. *Maxwell*'s „Theory of electricity" 1, p. 418; 2, p. 63, 3. Aufl.

26) *G. G. Stokes,* Cambr. and Dubl. Math. J. (2) 6 (1851), p. 215, oder „Math. and phys. Papers" 3, p. 203, hat die Wirkung der Koeffizienten μ_1, μ_2, μ_3 bez. ω_1, ω_2, ω_3 (s. folgende S.) auf die Form der Strömungskurven in einem Körper untersucht, welcher einen Quellenpunkt enthält; er zeigt, dass eine gewisse spiralförmige Bewegung bei Krystallen auftritt, welche keine oder nur eine einzige Symmetrieaxe besitzen. Über die spiralförmige Bewegung siehe auch *Boussinesq,* Par. C. R. 66 (1868), p. 1194.

27) Siehe *Boussinesq,* Par. C. R. 65 (1867), p. 104; 66 (1868), p. 1194; J. de math. (2) 14 (1869), p. 265. Auch *Lamé,* „Leçons sur la théorie de la chal.", p. 35 u. ff.

28) *Duhamel,* J. éc. polyt. 13, cah. 21 (1832), p. 377.

die Werte der μ gegebenen Vektor (μ_1, μ_2, μ_3). Er hat demnach die Richtung senkrecht zur Ebene durch den Radiusvektor (X, Y, Z) und die Gerade, deren Richtungskoeffizienten mit (μ_1, μ_2, μ_3) proportional sind; die absolute Grösse dieses Vektors ist

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}} \, (\mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2)^{\frac{1}{2}} \sin \varphi,$$

worin φ den zwischen (X, Y, Z) und (μ_1, μ_2, μ_3) enthaltenen Winkel bedeutet. Wählt man die Hauptaxen der Leitungsfähigkeit als Koordinatenaxen, so verschwinden die λ; für $\varkappa_{11}$, $\varkappa_{22}$, $\varkappa_{33}$ schreiben wir kürzer $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$. Bezeichnen wir noch die Komponenten des Vektors (μ_1, μ_2, μ_3) im neuen Koordinatensystem mit ω_1, ω_2, ω_3, so haben wir den Vektor $\mathfrak{Q}$ nunmehr durch die folgenden Formeln zu bestimmen:

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q}_x &= \varkappa_1 X + \omega_3 Y - \omega_2 Z, \\ \mathfrak{Q}_y &= \varkappa_2 Y + \omega_1 Z - \omega_3 X, \\ \mathfrak{Q}_z &= \varkappa_3 Z + \omega_2 X - \omega_1 Y; \end{aligned}$$

es hat sich also herausgestellt, dass nur sechs unabhängige Konstanten der Leitungsfähigkeit existieren, zu denen die drei Richtungsgrössen hinzukommen, welche die Lage der Hauptaxen definieren. Die Konstanten $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ heissen die *Hauptleitungsfähigkeiten des Krystalls*; mit Rücksicht auf die Symmetrie der einzelnen Krystallgruppen lässt sich zeigen, dass in gewissen Fällen die Konstanten ω_1, ω_2, ω_3 Null sein müssen.

Geradeso wie bei einem isotropen Körper ergiebt sich jetzt, dass die Temperaturfunktion in einem leitenden Krystall der Gleichung

$$\gamma \varrho \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \mathfrak{Q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Q}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Q}_z}{\partial z} = 0$$

Genüge leistet; nimmt man die Hauptaxen der Leitungsfähigkeit als Koordinatenaxen, so lässt sich die partielle Differentialgleichung der Wärmebewegung in der einfachen Form schreiben

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k_3 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

worin

$$k_1 = \frac{\varkappa_1}{\gamma \varrho}, \quad k_2 = \frac{\varkappa_2}{\gamma \varrho}, \quad k_3 = \frac{\varkappa_3}{\gamma \varrho}$$

als Haupttemperaturleitfähigkeiten bezeichnet werden können. Diese Form gilt, gleichviel ob die Konstanten ω verschwinden oder nicht, indem sich die mit diesen Konstanten behafteten Glieder in der Differentialgleichung der Wärmebewegung gegenseitig zerstören. Schreibt man schliesslich noch, indem man unter k eine ganz beliebige Grösse von der Dimension der Temperaturleitfähigkeit versteht:

$$x' = \sqrt{\frac{k}{k_1}}\, x, \quad y' = \sqrt{\frac{k}{k_2}}\, y, \quad z' = \sqrt{\frac{k}{k_3}}\, z,$$

so reduziert sich die Gleichung auf dieselbe Form wie bei einem isotropen Körper, nämlich

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \Delta u;$$

die in Nr. 3 enthaltenen Sätze über Lösungen dieser Gleichung lassen sich daher unmittelbar auf den vorliegenden Fall übertragen.

5. Die lineare Wärmeleitung. Wenn die Wärmebewegung solcher Art ist, dass die isothermischen Flächen parallele Ebenen sind, so hängt die Temperatur ausser von der Zeit nur von einer Raumkoordinate ab. In diesem Fall, wo die Bewegung *linear* genannt wird, reduziert sich die Gleichung der Wärmeleitung auf die Form

$$\gamma \varrho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa \frac{\partial u}{\partial x}\right); \tag{13}$$

wenn $\varkappa$ als konstant angenommen und wieder $k = \frac{\varkappa}{\gamma \varrho}$ gesetzt wird, hat die Gleichung die Form[29])

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{14}$$

Diese Annahme einer konstanten Leitungsfähigkeit wird den Untersuchungen von *Fourier, Poisson* und anderen zu Grunde gelegt. Um die Differentialgleichungen (13) oder (14) anwenden zu können, wird vorausgesetzt, entweder dass der Leiter in der Richtung der yz-Ebene unendlich ausgedehnt ist, oder dass der leitende Körper aus einem Stab besteht, der vor seitlicher Ausstrahlung geschützt ist.

Hat man es andrerseits mit einem Stabe zu thun, der in ein Medium von konstanter Temperatur (die wir gleich Null annehmen können) seitlich ausstrahlt, so lässt sich, unter den Voraussetzungen, dass der Querschnitt und die äussere Leitungsfähigkeit konstant sind, die Differentialgleichung für die Wärmebewegung auf die Form (2) reduzieren. Die Gleichung lautet nämlich in diesem Fall zunächst:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h' u, \tag{15}$$

---

29) Mit der Integration dieser Gleichung haben sich viele Mathematiker beschäftigt; u. a. *Laplace,* J. éc. polyt. cah. 15 (1809), p. 255; *Fourier,* „Théorie"; *Poisson,* „Théorie"; *Ampère,* J. éc. polyt. 10, p. 587; *L. Schläfli,* J. f. Math. 72 (1870), p. 263; *A. Harnack,* Zeitschr. Math. Phys. 32 (1887), p. 91; *S. v. Kowalewski,* J. f. Math. 80 (1875), p. 22; *G. Darboux,* Par. C. R. 106, p. 651; *P. Appell,* J. de math. (4) 8 (1892), p. 187. Siehe auch *Jordan,* „Cours d'Analyse" 3; *Boussinesq,* „Cours d'Analyse infinitésimale"; *Riemann-Hattendorff* und *Riemann-Weber,* „Part. Differentialgl."

wo h' eine von dem Umfang des Querschnitts und der äusseren Leitungsfähigkeit abhängige Konstante ist; (genauere Definition derselben in Nr. **15**, wo indessen wieder einfacher h statt h' geschrieben ist); setzt man

$$u = e^{-h't} v, \tag{16}$$

so genügt v einer Gleichung, die mit (14) der Form nach übereinstimmt[30]).

Eine einfache Lösung der Differentialgleichung (14) ist

$$u = Ae^{\alpha x + k\alpha^2 t},$$

wo A, α willkürliche reelle oder komplexe Zahlen darstellen; schreibt man $\alpha = p \pm iq$, so ergibt sich als Lösung

$$u = Ae^{px + k(p^2 - q^2)t} \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} (qx + 2kpqt),$$

oder als besonderer Fall derselben

$$u = Ae^{-km^2 t} \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} mx.$$

Durch Zusammensetzung solcher Lösungen, in denen den Konstanten p, q, resp. m, eine unendliche Anzahl verschiedener Werte zugeschrieben wird, haben *Fourier*, *Poisson* und *Duhamel* Ausdrücke in der Form von unendlichen Reihen und bestimmten Integralen erhalten, welche die Temperatur in speziellen Fällen der linearen Wärmeleitung ausdrücken. Indem sich *Fourier* die Aufgabe stellte, die einem *willkürlich* gegebenen Anfangstemperaturzustand entsprechende Lösung in der angegebenen Form zu erhalten, wurde er auf seine bahnbrechenden Untersuchungen der sogenannten *Fourier*'schen Reihen und Integrale geführt, welche in ihrer späteren Entwicklung einen so grossen Einfluss auf die reine Mathematik ausgeübt und so viele Anwendungen in der mathematischen Physik gefunden haben. Die wichtigsten auf diese Weise erhaltenen Resultate führen wir hier an.

a) Es sei ein unendlich ausgedehnter Leiter durch die beiden Ebenen $x = 0$, $x = a$ begrenzt; wenn die Ebenen die konstanten Temperaturen u_0, u_1 haben, und dieser Zustand so lange gedauert hat, dass der Anfangszustand keinen Einfluss mehr hat, so ist die Bewegung eine stationäre, und die Temperatur wird ausgedrückt durch[31])

$$u = u_0 + (u_1 - u_0) \frac{x}{a}.$$

b) Ein Stab von der Länge a gebe Wärme durch Strahlung an

30) *Poisson*, „Théorie", p. 265.
31) *Fourier*, „Théorie", chap. VII.

ein Medium ab, welches die konstante Temperatur Null hat, und es gelten sonst die gleichen Bedingungen wie unter a), so ergiebt sich für die Temperatur im Zustand des Gleichgewichts[32])

$$u = \left[u_0 \operatorname{Sin}\left\{\sqrt{\frac{h'}{k}}(a-x)\right\} + u_1 \operatorname{Sin}\left(\sqrt{\frac{h'}{k}}\,x\right)\right] / \operatorname{Sin}\left(a\sqrt{\frac{h'}{k}}\right).$$

Wenn a unendlich gross gesetzt wird, so erhält man die Lösung

$$u = u_0 e^{-\sqrt{\frac{h'}{k}}\,x}$$

für den Fall eines unendlich langen Stabes, dessen Ende $x = 0$ die konstante Temperatur u_0 hat, und welcher die an diesem Ende eintretende Wärme durch laterale Strahlung verliert.

c) Es sei die Anfangstemperatur eines Leiters durch

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{a}$$

ausgedrückt und die Temperatur der beiden Grenzflächen $x = 0$, $x = a$ Null. Die Lösung[33]) ist in diesem Fall gegeben durch die *Fourier*sche Reihe:

$$u = \sum A_n e^{-\frac{k n^2 \pi^2}{a^2} t} \sin\frac{n\pi x}{a}$$

oder

$$u = \frac{2}{a} \sum e^{-\frac{k n^2 \pi^2}{a^2} t} \sin\frac{n\pi x}{a} \int_0^a f(x') \sin\frac{n\pi x'}{a}\, dx'.$$

Wenn a unendlich gross wird, so erhalten wir das *Fourier*'sche Integral:

$$u = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-k\alpha^2 t} f(x') \sin\alpha x \sin\alpha x'\, d\alpha\, dx'.$$

d) Für den in c) beschriebenen Leiter ist, wenn die Grenzebenen verschiedene konstante Temperaturen u_0, u_1 haben[34]),

$$u = u_0 + (u_1 - u_0)\frac{x}{a} - \frac{2}{\pi} \sum_1^\infty \frac{1}{n}\{u_0 - u_1(-1)^n\} e^{-\frac{k n^2 \pi^2}{a^2} t} \sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$+ \frac{2}{a} \sum e^{-\frac{k n^2 \pi^2}{a^2} t} \sin\frac{n\pi x}{a} \int_0^a f(x') \sin\frac{n\pi x'}{a}\, dx'.$$

32) *Fourier*, „Théorie", chap. I, sect. V. Wegen der experimentellen Bestätigung dieser Formel vgl. Nr. **20** dieses Art.

33) *Fourier*, „Théorie", chap. IX.

34) *Duhamel*, J. éc. polyt. **14**, cah. 22 (1833).

Hier ergiebt sich die Bedeutung der beiden ersten Terme der rechten Seite aus a), die des letzten aus c). Der dritte Term bedeutet diejenige Temperatur, die unser Leiter haben würde, wenn seine Anfangstemperatur gleich $-u_0-(u_1-u_0)\frac{x}{a}$ ist und seine Grenzebenen auf der Temperatur Null gehalten werden.

e) Die Lösung für denselben Leiter wie in d), wobei aber jetzt die Temperaturen der Grenzebenen vorgeschriebene Funktionen der Zeit $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$ sein mögen, lässt sich nach Gl. (12) aus der Lösung in d) durch Zusammensetzung ableiten; sie lautet[35])

$$u=\frac{2k\pi}{a^2}\sum n\sin\frac{n\pi x}{a}\int_0^t e^{-\frac{kn^2\pi^2}{a^2}(t-t')}\{\varphi_0(t')-(-1)^n\varphi_1(t')\}\,dt'$$

$$+\frac{2}{a}\sum e^{-\frac{kn^2\pi^2}{a^2}t}\sin\frac{n\pi x}{a}\int_0^a f(x')\sin\frac{n\pi x'}{a}\,dx'.$$

Dieser Ausdruck stellt die Temperatur an den Grenzflächen selbst ersichtlich nicht dar, ergiebt aber die richtigen Oberflächenwerte $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, wenn man, von $x>0$ oder $x<a$ kommend, den Limes von u für $x=0$ oder $x=a$ bildet.

Setzen wir $\varphi_0(t)=\varphi_1(t)=\varphi(t)$, so wird der erste Teil des obigen Ausdrucks

$$\frac{4k\pi}{a^2}\sum(2n+1)\sin\frac{(2n+1)\pi x}{a}\int_0^t e^{-\frac{k(2n+1)^2\pi^2}{a^2}(t-t')}\varphi(t')\,dt'.$$

Diese Formel lässt sich auf den Fall eines dünnen, ringförmigen[36]) Leiters von der Länge a mit konstantem Querschnitt anwenden, unter der Voraussetzung, dass der Querschnitt $x=0$ die vorgeschriebene Temperatur $\varphi(t)$ hat, und dass keine laterale Strahlung stattfindet.

f) Die Temperatur eines Ringes, dessen Anfangstemperatur Null ist, von dem ein Querschnitt ($x=0$) auf der konstanten Temperatur u_0 gehalten wird und der in ein umgebendes Medium von der konstanten Temperatur Null ausstrahlt, ist mit Rücksicht auf den letzten Ausdruck und die Transformation (16) durch die Formel gegeben:

---

35) *Poisson,* J. éc. polyt. cah. 19, p. 69; *Fourier,* Par. mém. 8 (1829), p. 581 (Oeuvres 2, p. 145); *Dirichlet,* J. f. Math. 5 (1830), p. 287 (Werke 1, p. 161).

36) Die Wärmeleitung in einem dünnen Ring hat *Fourier* behandelt, siehe „Théorie", chap. IV.

$$u = u_0 \frac{4}{a^2} \sum (2n+1) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{a} \left\{ \frac{1 - e^{-\left[h' + k\frac{(2n+1)^2\pi^2}{a^2}\right] t}}{\frac{h'}{k} + \frac{(2n+1)^2\pi^2}{a^2}} \right\}.$$

g) Betrachten wir nun den Fall eines durch die Ebenen $x = 0$, $x = a$ begrenzten Leiters, bei welchem Strahlung über die beiden Grenzebenen stattfindet (vgl. auch Nr. **23**). Wenn die Temperatur der Umgebung in beiden Fällen Null ist, so lassen sich Lösungen von der Form

$$u = \sum e^{-k\lambda^2 t}(A_\lambda \cos \lambda x + B_\lambda \sin \lambda x)$$

anwenden, wo λ eine der unendlich vielen reellen Wurzeln der beiden Gleichungen

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda a}{2} = + \frac{h}{\lambda}, \quad \operatorname{tg} \frac{\lambda a}{2} = - \frac{\lambda}{h}$$

bezeichnet. *Fourier* hat die Entwicklung einer willkürlich gegebenen Funktion in der Form einer Reihe $\sum(A_\lambda \cos \lambda x + B_\lambda \sin \lambda x)$ untersucht[37]). Wenn $f(x)$ die Anfangstemperatur ist, so lautet das Resultat[38])

$$u = 2 \sum_{r=1}^{r=\infty} e^{-k\lambda_r^2 t} \frac{\lambda_r \cos \lambda_r x + h \sin \lambda_r x}{2h + a(h^2 + \lambda_r^2)} \int_0^a (\lambda_r \cos \lambda_r x' + h \sin \lambda_r x') f(x') dx'.$$

Im Fall $a = \infty$ wird die entsprechende Formel

$$u = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty f(x')\, e^{-k\lambda^2 t} \frac{(\lambda \cos \lambda x + h \sin \lambda x)(\lambda \cos \lambda x' + h \sin \lambda x')}{h^2 + \lambda^2} d\lambda\, dx'.$$

Im letzteren Falle braucht man, wenn die Temperatur der Umgebung $\varphi(t)$ anstatt Null ist, nur den Ausdruck

$$\frac{2h}{\pi} \int_0^t dt' \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(t')\, \lambda^2\, e^{-k\lambda^2(t-t')} \frac{(\lambda \cos \lambda x + h \sin \lambda x)(\lambda \cos \lambda x' + h \sin \lambda x')}{h^2 + \lambda^2} d\lambda\, dx'$$

hinzuzufügen, um die nunmehrige Temperaturverteilung im Innern des Leiters zu erhalten.

h) Es sei ein unendlich ausgedehnter Leiter durch die Ebene $x = 0$ begrenzt und die Temperatur der Grenzebene sei $A \cos(\lambda t + \beta)$, so lässt sich leicht verifizieren oder auch aus der Formel in e) ableiten, dass die Temperatur im leitenden Körper

$$A e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{2k}}\, x} \cos\left(\lambda t - x\sqrt{\frac{\lambda}{2k}} + \beta\right)$$

---

37) *Fourier*, „Théorie", chap. VII.

38) *Poisson*, „Théorie", p. 267, 323. *Poisson* behandelt auch den allgemeinen Fall der Ausstrahlung in einen Raum von beliebiger Temperatur, ebenda p. 264.

ist[39]), vorausgesetzt, dass der Zustand schon so lange gedauert hat, dass alle Spuren der Anfangstemperatur verschwunden sind. Diese Formel findet Anwendung auf die Temperatur der Erde, wobei das in Betracht kommende Stück der Erdoberfläche als eben angesehen wird[40]). Es geht aus der Formel hervor, dass die Amplitude einer Temperaturschwankung nach der Tiefe hin schnell abnimmt und in einer gewissen Tiefe unmerklich wird. Die Maxima pflanzen sich mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2k\lambda}$ in die Tiefe fort; diese Geschwindigkeit nimmt ab, wenn die Periode wächst; insbesondere pflanzen sich die Tagesmaxima schneller fort als die Jahresmaxima.

Wenn Strahlung an der Grenzfläche $x = 0$ in ein Medium stattfindet, dessen Temperatur $A\cos(\lambda t + \beta)$ ist, so ergibt sich[41]) für die Temperatur in einem Punkt des Leiters

$$Ah\left\{h^2 + h\sqrt{\frac{2\lambda}{k}} + \frac{\lambda}{k}\right\}^{-\frac{1}{2}} e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{2k}}x}\cos\left(\lambda t - x\sqrt{\frac{\lambda}{2k}} + \beta - \varepsilon_\lambda\right),$$

wo

$$\operatorname{tg}\varepsilon_\lambda = \frac{\sqrt{\lambda}}{h\sqrt{2k} + \sqrt{\lambda}}.$$

Wenn die Temperatur der Umgebung $\varphi(t)$ ist und die Anfangstemperatur des Leiters $f(x)$, kann die Temperatur des Körpers durch[42])

$$\frac{h}{\pi}\int_0^\infty dt' \int_0^\infty \frac{\varphi(t')\, e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{2k}}x}\cos\left\{\lambda(t-t') - \sqrt{\frac{\lambda}{2k}}x - \varepsilon_\lambda\right\}}{\left\{h^2 + h\sqrt{\frac{2\lambda}{k}} + \frac{\lambda}{k}\right\}^{\frac{1}{2}}} d\lambda$$

$$+ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_0^\infty f(x')\, e^{-k\varrho^2 t}\frac{(\varrho\cos\varrho x + h\sin\varrho x)(\varrho\cos\varrho x' + h\sin\varrho x')}{h^2 + \varrho^2}\, d\varrho\, dx'$$

dargestellt werden; dieses Resultat ist mit dem am Ende von g) angegebenen äquivalent.

i) Aus dem *Fourier*'schen Integrale folgt, dass die Temperatur in einem Punkt eines unendlich ausgedehnten Körpers, dessen Anfangstemperatur $f(x)$ ist, durch die Formel[43])

---

39) *Poisson*, „Théorie", p. 346.

40) Den entsprechenden Fall der Kugeloberfläche behandelt *Fourier* in der Preisschrift von 1811, Par. mém. 5 (1821/22), p. 153, Oeuvres 2, p. 1.

41) *Poisson*, „Théorie", p 330 und supplément; siehe auch *Kelvin*, Cambr. Math. J. 3 (1842), p. 206 oder „Math. and phys. Papers" 1, p. 10—21.

42) *Poisson*, „Théorie", p. 334.

43) *Fourier*, „Théorie", chap. IX, wo die anderen Formen auch angegeben werden.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \int_{0}^{\infty} f(x') e^{-k\alpha^2 t} \cos \alpha (x - x')\, dx'$$

dargestellt ist. Dieses Resultat lässt sich auf die folgenden beiden Formen bringen, von denen die zweite schon vor *Fourier* von *Laplace*[44]) behandelt worden ist:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi k t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x')\, e^{-\frac{(x-x')^2}{4kt}}\, dx',$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-q^2} f(x + 2q\sqrt{kt})\, dq.$$

Im besonderen sei $f(x) = u_1$ für $x > 0$, $f(x) = u_2$ für $x < 0$; dann erhält man aus der zweiten Form für die Temperatur zur Zeit t an der Stelle x:

$$\frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_1 - u_2}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} e^{-q^2}\, dq.^{45})^{46})$$

Nimmt man z. B. $u_1 = 0$, $u_2 = 2$, so wird an der Stelle $x = 0$ dauernd die Temperatur $u = (u_1 + u_2)/2 = 1$ herrschen. Die vorige Formel geht in diesem Falle über in

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\infty} e^{-q^2}\, dq.$$

6. Die Behandlung der linearen Wärmebewegung nach der Methode der Quellpunkte. Wenn in einem unendlich ausgedehnten leitenden Körper die Anfangstemperatur $\varphi(x)$ überall verschwindet, mit Ausnahme der Umgebung einer einzelnen Ebene x', so ist die Temperatur zur Zeit t im Punkte x

$$\frac{Q}{2\sqrt{\pi k t}}\, e^{-\frac{(x-x')^2}{4kt}},$$

44) *Laplace*, J. éc. polyt. cah. 15 (1809), p. 255 (Oeuvres 13).

45) *Kelvin* hat diese Formel benutzt, um die Zeit abzuschätzen, die verstrichen ist, seit die Erdoberfläche fest wurde, siehe Edinb. Trans. 23 (1862) oder „Math. and phys. Papers" 3, p. 295; „On the secular cooling of the earth"; auch *Thomson* und *Tait*, Natural philosophy, appendix D.

46) Tafeln zur Berechnung dieses in der Wärmeleitung ebenso wie in der Gastheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung wichtigen Integrales finden sich in jedem grösseren Handbuch über Wahrscheinlichkeitsrechnung. Näheres hierüber in Encykl. I D 1, Art. *Czuber*, Anm. 123, und I D 2, Art. *Bauschinger*, Nr. 4.

vorausgesetzt, dass $\int \varphi(x')\,dx'$ eine endliche Grenze Q besitzt. Indem wir die Aufmerksamkeit auf eine der x-Achse parallele Gerade beschränken, nennen wir den Punkt x' einen momentanen *Quellpunkt*[47]) von der Stärke Q. Mit $Q = 1$ ergiebt sich die sogenannte Hauptlösung

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi k t}}\, e^{-\frac{(x-x')^2}{4kt}}$$

der Differentialgleichung der linearen Wärmebewegung; dieselbe spielt hier eine ähnliche Rolle, wie die Lösung $1/r$ in der gewöhnlichen Potentialtheorie.

Wenn Wärme im Punkt x' kontinuierlich erzeugt wird und die in der Zeit dt' erzeugte Wärmemenge $\varphi(t')\,dt'$ beträgt, so ist die Temperatur zur Zeit t

$$\int_0^t \frac{1}{2\sqrt{\pi k(t-t')}}\, \varphi(t')\, e^{-\frac{(x-x')^2}{4k(t-t')}}\, dt';$$

in diesem Fall heisst der Punkt x' ein kontinuierlicher Quellpunkt.

Wenn zwei momentane Quellpunkte von der Stärke Q resp. $-Q$ in den Punkten $x' + dx'$, x' existieren, so zwar, dass „ihr Moment“ $Q \cdot dx' = P$ einen endlichen Wert hat, so entsteht im Punkt x' ein *Doppelquellpunkt,* welcher die Temperatur

$$\frac{P}{4\sqrt{\pi}(kt)^{\frac{3}{2}}}\,(x - x')\, e^{-\frac{(x-x')^2}{4kt}}$$

im Punkte x verursacht; die Grösse P heisst die Stärke des Doppelquellpunktes.

Die von einem kontinuierlichen Doppelquellpunkt verursachte Temperatur ist

$$\frac{1}{4\sqrt{\pi}k^{\frac{3}{2}}} \int_0^t \frac{x - x'}{(t-t')^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{(x-x')^2}{4k(t-t')}}\, \varphi(t')\, dt',$$

47) Der Gebrauch von Quellpunkten in dieser Theorie rührt in der Hauptsache von *Kelvin* her; siehe „Encycl. Britann.“, 9. Aufl., 11, p. 587, oder „Math. and phys. Papers“ 2, p. 41, wo viele Anwendungen gemacht werden. Die sogleich zu nennende „Hauptlösung“ war indessen schon *Poisson* bekannt; Par. mém. 2 (1818), p. 151; Bull. soc. philom. 1822, p. 83. Ihre Deutung als Wirkung eines Quellpunktes findet sich gelegentlich bei *Fourier,* „Théorie“, Nr. 374 und 378.

wo $\varphi(t')$ die Stärke zur Zeit t' bezeichnet; wenn x sich dem Wert x' nähert, so hat dieser Ausdruck den Grenzwert $\frac{1}{2k}\varphi(t)$, falls $x > x'$, oder $-\frac{1}{2k}\varphi(t)$, falls $x < x'$.

Besonders fruchtbar erweist sich die Methode der Quellpunkte im Zusammenhang mit dem *Symmetrieprinzip* (*Spiegelungsprinzip*). Nach diesem Prinzip verfährt man, um die Temperaturfunktion in einem begrenzten Raum zu bestimmen, allgemein gesprochen so, dass man den betr. Raum und zugleich die Temperaturfunktion ins Unendliche fortsetzt. Der Gesamtverlauf der Temperaturfunktion wird durch ihre singulären Punkte bestimmt, welche, wenn in dem ursprünglich gegebenen Raum Quellpunkte vorgeschrieben waren, teilweise aus diesen, teilweise aus Quellpunkten in der Fortsetzung des Raumes bestehen. Die letzteren sucht man in solcher Weise zu bestimmen, dass den Grenzbedingungen an der Oberfläche des Raumes Genüge geleistet wird. In einfachen Fällen, z. B. wenn der Leiter durch eine oder mehrere Ebenen begrenzt wird, lassen sich die erforderlichen neuen Quellpunkte als Spiegelbilder der ursprünglich gegebenen, ohne Anwendung von Rechenoperationen, unmittelbar konstruieren. Insbesondere kann man in solchen Fällen, indem man in dem ursprünglichen Gebiet *einen* Quellpunkt von beliebiger Lage annimmt, die „Green'sche Funktion" v (vgl. Nr. **3**) für das betr. Gebiet herstellen. Auch Doppelquellpunkte können an den Grenzebenen auf ähnliche Weise gespiegelt werden wie einfache Quellpunkte.

Übrigens ist das Symmetrieprinzip nicht notwendig an die Vorstellung der Quellpunkte gebunden, in welchem Falle seine Verwendung nur besonders anschaulich wird. Es ergiebt sich dieses schon daraus, dass man jede beliebige Temperaturverteilung als Verteilung von Quellpunkten ansehen kann. In der That handelt *Lamé*, der als Erster das Spiegelungsverfahren in der Wärmeleitungstheorie systematisch anwendete (vgl. Nr. **7** g) stets von kontinuierlichen Temperaturverteilungen, die er in den Aussenraum des fraglichen Gebietes symmetrisch fortsetzt.

a) Der nach der positiven Richtung unendlich ausgedehnte Körper sei durch die Ebene $x = 0$ begrenzt, und diese Grenzebene habe die Nulltemperatur; die anfängliche Temperaturverteilung betrachte man als eine Verteilung von Quellpunkten von der Stärke $f(x')\,dx'$ an der Stelle x'. Ihr Spiegelbild besteht aus einer Verteilung von Quellpunkten in der Fortsetzung des Körpers nach der negativen Richtung der x-Achse, so dass im Punkte $-x'$ die Stärke $-f(x')\,dx'$ beträgt. Die Temperaturverteilung zur Zeit t ist durch

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi k t}}\int_0^\infty \left\{ e^{-\frac{(x-x')^2}{4kt}} - e^{-\frac{(x+x')^2}{4kt}} \right\} f(x')\,dx',$$

oder die äquivalente Formel

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{-x}{2\sqrt{kt}}}^\infty f(2\beta\sqrt{kt}+x)e^{-\beta^2}d\beta - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^\infty f(2\beta\sqrt{kt}-x)e^{-\beta^2}d\beta$$

ausgedrückt.

Wenn die Temperatur an der Grenzebene gleich $\varphi(t)$ vorgeschrieben ist, so denken wir uns einen kontinuierlichen Doppelquellpunkt von der Stärke $2k\varphi(t')\,dt'$ an der Grenzebene; die durch denselben verursachte Temperaturverteilung[48]) wird durch

$$\frac{x}{2\sqrt{\pi k}}\int_0^t \frac{1}{(t-t')^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4k(t-t')}} \varphi(t')\,dt',$$

oder den äquivalenten Ausdruck

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^\infty e^{-q^2} \varphi\left(t - \frac{x^2}{4kq^2}\right) dq$$

dargestellt.

b) Der Ausdruck

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi k t}}\int_0^a f(x') \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \left\{ e^{-\frac{(x-x'-2na)^2}{4kt}} - e^{-\frac{(x+x'-2na)^2}{4kt}} \right\} dx'$$

stellt die Temperaturverteilung in einem durch $x=0$, $x=a$ begrenzten Körper dar, wenn die Grenzebenen die Temperatur Null haben und $f(x)$ die Anfangstemperatur ist. Hier werden Quellpunkte von der Stärke $f(x')\,dx'$ an den Stellen $x'+2na$, und von der Stärke $-f(x')\,dx'$ an den Stellen $-x'+2na$ in Betracht gezogen.

Wenn die Grenzebene $x=0$ die Temperatur $\varphi(t)$ hat, und die andere Grenzebene die Temperatur Null, so erhalten wir den hinzukommenden Ausdruck durch eine Verteilung von Doppelquellpunkten von abwechselnden Zeichen in den Punkten $2na$, wo n alle positiven und negativen ganzen Zahlwerte hat. Der hinzuzufügende Ausdruck lautet:

48) Siehe *Kelvin,* Lond. Proc. R. S. 7 (1855), p. 382, oder „Math. and phys. Papers" 2, p. 61: „On the theory of the electric telegraph".

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi k}}\int_0^t \varphi(t')\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}\left\{(-1)^n(x+2na)\,e^{-\frac{(x+2na)^2}{4k(t-t')}}\right\}\frac{dt'}{(t-t')^{\frac{3}{2}}}.$$

Ein entsprechender Ausdruck ist hinzuzufügen, wenn die Grenzebene $x = a$ nicht die Temperatur 0, sondern eine beliebig wechselnde Temperatur hat. Durch Addition der drei vorangehenden Ausdrücke erhalten wir eine andere Form der in Nr. **5** e) angegebenen Lösung.

c) Wenn einem Ringe von der Länge a und der gleichmässigen Anfangstemperatur Null eine Wärmemenge Q zur Zeit $t = 0$ im Punkte $x = 0$ zugeführt wird und sich im Ringe ausbreitet, so ist die Temperaturverteilung durch

$$\frac{Q}{2\sqrt{\pi k t}}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x+na)^2}{4kt}}$$

ausgedrückt. Diese Formel erhält man, wenn man sich den Ring in fortgesetzter Wiederholung auf eine unendliche Gerade abgebildet denkt und auf dieser eine Verteilung von momentanen Quellpunkten in den Punkten $x = na$, alle von der gleichen Stärke Q, anbringt. Der vorstehende Ausdruck ist, bis auf einen konstanten Faktor, identisch mit einer der in der Theorie der elliptischen Funktionen vorkommenden θ-Funktionen. Löst man dieselbe Aufgabe nach der *Fourier*'schen Methode der Reihenentwickelung und vergleicht die entstehenden Resultate, so erhält man eine wichtige Formel aus der Transformationstheorie der θ-Funktionen[49]).

d) Wenn der von der Ebene $x = 0$ begrenzte Körper von einem Medium umgeben ist, dessen Temperatur durch $\varphi(t)$ ausgedrückt wird, so ist der von der Anfangstemperatur unabhängige Teil der Temperaturverteilung im Körper[50])

$$\frac{2h}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty dz\int_{\frac{x+z}{2\sqrt{kt}}}^\infty e^{-q^2-hz}\varphi\left\{t-\frac{(x+z)^2}{4kq^2}\right\}dq;$$

hier sind Doppelquellpunkte von der Stärke $he^{-hz}dz\cdot\varphi(t)$ in jedem Punkt $-z$ auf der negativen Seite der x-Axe verteilt. Der vom Anfangszustand abhängige Teil der Temperaturverteilung[51]) ist

49) Vgl. z. B. *H. Poincaré*, „Th. de la propagation de la chaleur", p. 91 ähnlich schon bei *Poisson*, „Théorie", suppl. p. 51.

50) *E. W. Hobson*, Cambr. Proc. 6 (1888), p. 184; eine andere äquivalente Formel hat *Boussinesq* durch eine allgemeine Methode der Integration erhalten; siehe das Buch „Applications des potentiels", Paris 1885, p. 404.

51) *G. H. Bryan*, Cambr. Phil. Soc. Proc. 7 (1889), p. 246.

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi k t}}\int_0^\infty \left\{ e^{-\frac{(x-x')^2}{4kt}} + e^{-\frac{(x+x')^2}{4kt}} \right\} f(x')\,dx'$$

$$- \frac{2h}{2\sqrt{\pi k t}} \int_0^\infty dz \int_0^\infty e^{-hz - \frac{(x+x'+z)^2}{4kt}} f(x')\,dx'.$$

Dabei wird der Quellpunkt $f(x')\,dx'$ durch eine gleich starke Quelle im Punkte $-x'$ und eine Verteilung von Quellpunkten von der Stärke $-2he^{-hz}\,dz f(x')\,dx'$ in den Punkten $-(x'+z)$ abgebildet.

Im Fall $\varphi(t) = 0$, $f(x) = C$ ist die Temperatur in einem Punkte des sich abkühlenden Körpers

$$\frac{C}{2\sqrt{\pi k t}} \left\{ \int_0^\infty \left\{ e^{-\frac{(x-x')^2}{4kt}} + e^{-\frac{(x+x')^2}{4kt}} \right\} dx' - 2h \int_0^\infty dz \int_0^\infty e^{-hz} \cdot e^{-\frac{(x+x'+z)^2}{4kt}}\, dx' \right\}.$$

Die semikonvergente Reihe[52])

$$\frac{C}{h\sqrt{\pi k t}} \left\{ 1 - \frac{1}{2h^2kt} + \frac{1\cdot 3}{(2h^2kt)^2} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{(2h^2kt)^3} + \cdots \right\},$$

welche aus der obigen Formel für $x = 0$ hervorgeht, eignet sich zur Berechnung der Temperatur an der Grenzfläche, wenn t einen nicht zu kleinen Wert hat; für grosse Werte von t ist $\frac{C}{h\sqrt{\pi k t}}$ der approximative Ausdruck für die Oberflächentemperatur.

e) Es sei der unendliche Raum von zwei Substanzen erfüllt, die an der Ebene $x = 0$ zusammenstossen; bei einem gegebenen Anfangszustand lässt sich die Temperaturverteilung zur Zeit t in den beiden Körpern durch die Methode der Spiegelbilder ermitteln. Es genügt als Anfangszustand im besonderen zu Grunde zu legen: eine Quelle im Punkte $x = x'$ (z. B. $x' > 0$), sonst überall die Anfangstemperatur Null.

Wenn k_1, k_2 die Werte der Temperaturleitfähigkeit k und $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ diejenigen der Wärmeleitfähigkeit $\varkappa$ in den beiden Substanzen sind, so kann man leicht verifizieren, dass die Lösung[53])

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{t}} \left\{ e^{-\frac{(x-x')^2}{4k_1 t}} + \frac{\varkappa_1\sqrt{k_2} - \varkappa_2\sqrt{k_1}}{\varkappa_1\sqrt{k_2} + \varkappa_2\sqrt{k_1}}\, e^{-\frac{(x+x')^2}{4k_1 t}} \right\}, \quad x > 0,$$

$$u_2 = \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{2\varkappa_1\sqrt{k_2}}{\varkappa_1\sqrt{k_2} + \varkappa_2\sqrt{k_1}}\, e^{-\frac{\left(x - \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}x'\right)^2}{4k_2 t}}, \quad x < 0$$

52) Vgl. wegen ähnlicher asymptotischer Formeln: *Fourier,* „Théorie", Nr. 380; *Poisson,* „suppl.", Note B.

53) *A. Sommerfeld,* Math. Ann. 45 (1894), p. 266; ohne Benützung von Quell-

den beiden Bedingungen

$$\varkappa_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \varkappa_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad u_1 = u_2$$

an der Grenzebene genügt; die Stärke der erforderlichen Spiegelbilder ist also hier nach Massgabe des Verhältnisses der Temperaturleitfähigkeiten k_1, k_2 und der Wärmeleitfähigkeiten $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ zu wählen. Die Aufgabe lässt sich auch lösen, wenn die allgemeineren Bedingungen

$$\varkappa_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + H_1(u_1 - u_2) = 0, \quad \varkappa_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + H_2(u_1 - u_2) = 0$$

an der Grenzebene angenommen werden, oder wenn der Leiter nicht aus zwei, sondern aus drei oder mehr thermisch heterogenen Teilen besteht.

Die Untersuchung der Wärmeleitung in einem Medium von kontinuierlich variabler Leitfähigkeit haben *Sturm* und *Liouville* zu ihren allgemeinen, mathematisch wertvollen Untersuchungen angeregt[54]). Die Differentialgleichung (14) ist dabei durch die allgemeinere (13) zu ersetzen. Der Methode nach schliessen sich diese Untersuchungen an die der vorigen Nummer an, wobei an die Stelle der *Fourier*'schen Entwickelungen nach trigonometrischen Funktionen solche nach *Sturm-Liouville'schen Funktionen* treten.

7. Die Wärmeleitung in zwei oder drei Dimensionen. Elementare Lösungen der Gleichungen der Wärmebewegung für drei oder zwei Dimensionen sind

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} px \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} qy \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} rz \cdot e^{-k(p^2+q^2+r^2)t}$$

resp.

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} px \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} qy \cdot e^{-k(p^2+q^2)t}.$$

Solche Lösungen lassen sich unmittelbar in denjenigen Fällen verwenden, wo der Körper durch Ebenen begrenzt ist, die den Koordinatenebenen parallel laufen.

a) Der Körper sei durch die drei Ebenen $x = 0$, $y = l$, $y = -l$ begrenzt, und es sei $u = 0$ an den Grenzen $y = \pm l$, $u = U$ an der Grenze $x = 0$. Der stationäre Wärmezustand lässt sich in diesem Fall durch den Ausdruck[55]) darstellen

punkten behandelt von *H. Weber,* Gött. Nachr. 1893, p. 722, und Vierteljahrschr. der naturf. Ges. in Zürich, Mai 1871.

54) *J. Liouville,* Gergonne ann. 21 (1830/31), p. 133; *Sturm* und *Liouville,* J. de math. 1, 2, 3 (1836—38). Vgl. auch *M. W. Stekloff,* Ann. de Toulouse (2) 2 (1901), p. 281. Näheres hierüber s. Encykl. II, Art. *Bôcher,* II A 7a und Art. *Burkhardt,* II A 11.

55) *Fourier,* „Théorie", chap. III, sect. 4, 5

$$u = \frac{4U}{\pi}\left\{e^{-\frac{\pi x}{2l}}\cos\frac{\pi y}{2l} - \frac{1}{3}e^{-\frac{3\pi x}{2l}}\cos\frac{3\pi y}{2l} + \frac{1}{5}e^{-\frac{5\pi x}{2l}}\cos\frac{5\pi y}{2l} - \cdots\right\}$$

oder

$$u = \frac{2U}{\pi}\operatorname{arc\,tang}\left(\cos\frac{\pi y}{2l} \,/\, \mathfrak{Sin}\frac{\pi x}{2l}\right).$$

b) Ein unendlich langer Stab von rechteckigem Querschnitt sei durch die vier Ebenen $x = 0$, $x = a$, $y = \beta$, $y = -\beta$ begrenzt; die Temperatur an den Ebenen $x = 0$, $x = a$ werde durch $f(y)$, $F(y)$ gegeben, und an den Ebenen $y = \pm\beta$ sei vorausgesetzt, dass der Körper an ein Medium grenze, dessen Temperatur Null ist und in welches er Wärme durch Strahlung abgiebt. Die stationäre Temperaturverteilung erfüllt die Bedingungen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} - hu = 0 \text{ für } y = -\beta,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + hu = 0 \text{ für } y = +\beta, \quad u = f(y) \text{ für } x = 0, \quad u = F(y) \text{ für } x = a.$$

Die Lösung[56]) dieser Aufgabe lautet

$$u = 4\sum \lambda(2\lambda\beta + \sin 2\lambda\beta)^{-1}\,\mathfrak{Cof}\,\lambda\pi\left\{\mathfrak{Sin}\,\lambda(\pi - x)\int_0^\beta f_1(y)\cos\lambda y\,dy + \mathfrak{Sin}\,\lambda x\int_0^\beta F_1(y)\cos\lambda y\,dy\right\}\cos\lambda y$$

$$+ 4\sum \mu(2\mu\beta - \sin 2\mu\beta)^{-1}\,\mathfrak{Cof}\,\mu\pi\left\{\mathfrak{Sin}\,\mu(\pi - x)\int_0^\beta f_2(y)\sin\lambda y\,dy + \mathfrak{Sin}\,\mu x\int_0^\beta F_2(y)\sin\mu y\,dy\right\}\sin\mu y;$$

in diesem Ausdruck ist zur Abkürzung gesetzt

$$2f_1(y) = f(y) + f(-y), \qquad 2f_2(y) = f(y) - f(-y),$$
$$2F_1(y) = F(y) + F(-y), \qquad 2F_2(y) = F(y) - F(-y);$$

λ bezeichnet eine positive Wurzel der Gleichung

$$\lambda\beta\,\operatorname{tg}\lambda\beta = h\beta,$$

und μ eine positive Wurzel der Gleichung

$$\mu\beta\,\operatorname{cotg}\mu\beta = -h\beta.$$

c) Die stationäre Wärmebewegung in einem rechtwinkligen Parallelepipedon unter den Bedingungen

56) *Stokes*, „Math. and phys. Papers“ 1, p. 292, wo mehrere ähnliche Aufgaben gelöst werden.

$$u = f_1,\ x = 0, \qquad u = F_1,\ x = a,$$
$$u = f_2,\ y = 0, \qquad u = F_2,\ y = b,$$
$$u = f_3,\ z = 0, \qquad u = F_3,\ z = c$$

lässt sich in ähnlicher Form aus den vorangestellten elementaren Lösungen aufbauen.

d) Die in einem unbegrenzten homogenen (zwei- oder dreidimensionalen) Körper durch einen Quellpunkt von der Stärke Q verursachte Temperatur wird durch[57])

$$\frac{Q}{(2\sqrt{\pi k t})^2}\, e^{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{4kt}} \quad \text{resp.} \quad \frac{Q}{(2\sqrt{\pi k t})^3}\, e^{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z)^2}{4kt}}$$

ausgedrückt. Wenn Wärme im Punkte $x'y'$ resp. $x'y'z'$ kontinuierlich erzeugt wird, sodass die in der Zeit dt' erzeugte Wärmemenge $\varphi(t')\,dt'$ beträgt, so ist die Temperatur zur Zeit t

$$\int_0^t \frac{1}{(2\sqrt{\pi k(t-t')})^2}\, \varphi(t')\, e^{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{4k(t-t')}}\, dt'$$

resp.

$$\int_0^t \frac{1}{(2\sqrt{\pi k(t-t')})^3}\, \varphi(t') e^{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}{4k(t-t')}}\, dt'.$$

Wenn der Anfangszustand $u = f(x, y)$ resp. $u = f(x, y, z)$ in einem unbegrenzten Körper gegeben ist, so lautet der Ausdruck, welcher die Temperatur zur Zeit t darstellt,

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(p^2+q^2)} f(x + 2p\sqrt{kt},\ y + 2q\sqrt{kt})\, dp\, dq$$

resp.

$$\frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(p^2+q^2+r^2)} f(x + 2p\sqrt{kt},\ y+2q\sqrt{kt},\ z+2r\sqrt{kt})\, dp\, dq\, dr.$$

Diese Ausdrücke erhält man dadurch, dass man z. B. im dreidimensionalen Falle den Punkt x', y', z' als Quellpunkt von der Stärke $f(x', y', z')\,dx'\,dy'\,dz'$ betrachtet. Wenn die Anfangstemperatur nur in einem endlichen, den Punkt (0, 0, 0) umgebenden Teil des Körpers von Null verschieden ist, so wird die Temperatur nach längerer Zeit durch den Ausdruck

57) *Fourier*, „Théorie", chap. IX, sect. 2. Den Temperaturzustand, welcher von einem beweglichen Quellpunkt verursacht wird, hat *Boussinesq*, Par. C. R. 110, p. 1242 untersucht.

$$\frac{A}{8\pi^{\frac{3}{2}}k^{\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}}}\,e^{-\frac{x^2+y^2+z^2}{4kt}}$$

bestimmt, wo A die zu Anfang vorhandene totale Wärmemenge bezeichnet.

e) Im zweidimensionalen Fall sei ein sonst unendlich ausgedehnter Wärmeleiter durch die Axe $y = 0$ begrenzt; die von einer Doppelquelle im Punkt $(x', 0)$ verursachte Temperatur ist

$$\frac{Py}{8\pi k^2 t^2}\,e^{-\frac{(x-x')^2+y^2}{4kt}},$$

wo P die Stärke des Doppelquellpunktes bezeichnet, dessen Axe zur x-Axe senkrecht liegt. Wenn der Doppelquellpunkt ein kontinuierlicher von der Stärke $2kf(x')\,dx'\,dt'$ ist, so haben wir als Ausdruck für die Temperatur zur Zeit t

$$\frac{1}{4\pi k}\,f(x')\,dx'\int_0^t \frac{y}{(t-t')^2}\,e^{-\frac{(x-x')^2+y^2}{4k(t-t')}}\,dt';$$

indem wir dieses Integral auswerten, erhalten wir[58])

$$\frac{1}{\pi}\,\frac{y}{(x-x')^2+y^2}\,f(x')\,e^{-\frac{(x-x')^2+y^2}{4kt}}\,dx',$$

welcher Ausdruck überall in der x-Axe mit Ausnahme des Elements dx' verschwindet, und in diesem Element den Grenzwert $f(x')$ annimmt. Daraus ersieht man, dass der Ausdruck

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y}{(x-x')^2+y^2}\,e^{-\frac{(x-x')^2+y^2}{4kt}}\,f(x')\,dx'$$

die Temperatur darstellt, wenn die Anfangstemperatur in der Ebene überall Null ist und die Temperatur der Grenzlinie stets den gegebenen von der Zeit unabhängigen Wert $f(x)$ hat.

Wenn die Anfangstemperatur nicht Null sondern $\varphi(x, y)$ ist, so muss man dem obigen den Ausdruck hinzufügen

$$\frac{1}{4\pi kt}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty}\left[e^{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{4kt}}-e^{-\frac{(x-x')^2+(y+y')^2}{4kt}}\right]\varphi(x', y')\,dx'\,dy',$$

den man erhält, indem man die Quellpunkte $\varphi(x', y')\,dx'\,dy'$ gegen die Grenzlinie $y = 0$ spiegelt.

f) Wenn ein unendlich ausgedehnter dreidimensionaler Körper

58) *E. W. Hobson,* Lond. Math. Soc. Proc. 19 (1887), p. 279.

durch die Ebene $z = 0$ begrenzt ist und von einem Punkte dieser Ebene aus erwärmt wird, so betrachte man einen in der Begrenzungsebene gelegenen und senkrecht gegen diese gerichteten kontinuierlichen Doppelquellpunkt; die von ihm herrührende Temperatur beträgt

$$\frac{Pz}{16\pi^{\frac{3}{2}}k^{\frac{5}{2}}}\int_0^t \frac{dt'}{(t-t')^{\frac{5}{2}}}\, e^{-\frac{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}{4k(t-t')}} \quad \text{oder} \quad \frac{Pz}{k\pi^{\frac{3}{2}}r^3}\int_{\frac{r}{\sqrt{4kt}}}^{\infty} \alpha^2 e^{-\alpha^2}\, d\alpha,$$

wo $r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2$. Dieser Ausdruck wird für $x = x'$, $y = y'$ im Limes $z = 0$ unendlich gross und verschwindet sonst überall in der Grenzebene $z = 0$.

g) Durch die Methode der Spiegelbilder in ihrer Anwendung auf Quellpunkte oder kontinuierliche Temperaturverteilungen lassen sich Aufgaben auch für solche Gebiete lösen, die durch wiederholte Abspiegelung den ganzen Raum einfach und lückenlos erfüllen[59]). *G. Lamé*[60]) hat auf diese Weise Wärmeleitungsaufgaben ausser für das rechteckige Parallelepipedon, das Prisma mit regulär dreieckiger Basis etc., welche ersichtlich bei symmetrischer Wiederholung zu einer regulären Raumeinteilung Anlass geben, auch für einige Tetraeder behandelt („Tetraeder 1/6“ und „Tetraeder 1/24“), welche den 6. oder den 24. Teil des Würfels bilden. Diesen Tetraedern ist von *A. Schönflies*[61]) ein weiteres hinzugefügt, welches ebenfalls den Fundamentalbereich einer regulär-symmetrischen Raumeinteilung bildet und für welches daher Wärmeleitungsaufgaben ebenfalls nach dem Spiegelungsverfahren unmittelbar gelöst werden können. Auch wenn Strahlung an den Grenzebenen stattfindet, lässt sich das Spiegelungsverfahren bei solchen Gebieten anwenden[62]).

8. Wärmeleitung in einer Kugel. Wenn die Differentialgleichung der Wärmebewegung auf Polarkoordinaten $r\theta\varphi$ transformiert wird, so nimmt sie die Form an

---

59) Solche Gebiete könnte man mit Benutzung eines funktionentheoretischen Terminus als ebenflächig begrenzte symmetrische „automorphe Fundamentalbereiche“ bezeichnen.

60) Siehe seine beiden Bücher „Leçons sur les fonctions inverses des transcendentes et les surfaces isothermes“, Paris 1857, „Leçons sur la théorie analytique de la chaleur“, Paris 1861. Über die Wärmebewegung in einem Tetraeder siehe *Cotton*, Ann. de Toul. (2) 2 (1900). Eine Arbeit, die noch nicht erwähnt wurde, ist die von *Betti*, „Sopra la determinazione delle temperatura variabili di una lastra terminata“, Ann. di mat. (2) 1 (1867), p. 371.

61) *A. Schönflies*, Math. Ann. 34 (1889), p. 172.

62) *G. H. Bryan*, Lond. Math. Soc. Proc. 22 (1891), p. 424.

$$\frac{\partial}{\partial t}(ru) = k\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta}ru\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}ru\right].$$

Betrachten wir zunächst den Fall[63]), dass u unabhängig von θ und φ ist, dann wird unsere Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}(ru) = k\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru),$$

hat also dieselbe Form, wie im Fall der linearen Bewegung, nur dass ru anstatt u die abhängige Variable ist.

Wenn eine Kugel vom Radius c, deren Anfangstemperatur gleich $F(r)$ ist, von einem Medium umgeben ist, dessen Temperatur Null ist, und sich durch Strahlung abkühlt, so muss u die Nebenbedingungen erfüllen:

$$u = F(r) \text{ für } t = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial r} + hu = 0 \text{ für } r = c.$$

Insbesondere genügt der zweiten dieser Nebenbedingungen der Ausdruck

$$u = e^{-k\lambda^2 t}\frac{\sin\lambda r}{r},$$

falls λ eine Wurzel der Gleichung

$$\lambda c\cos\lambda c = (1 - hc)\sin\lambda c.$$

ist. Setzen wir $\lambda c = \psi$, $hc - 1 = p$, so wird λ durch die Gleichung $\psi\cos\psi + p\sin\psi = 0$ bestimmt; diese Gleichung hat keine komplexen Wurzeln, und wenn $p > -1$ ist, auch keine rein imaginären. Ist $-1 < p < 0$, so liegt eine Wurzel in jedem der Intervalle

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)\cdots;$$

ist $p > 0$, so liegt eine Wurzel in jedem der Intervalle

$$\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right), \left(\frac{5\pi}{2}, 3\pi\right)\cdots.$$

Die Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \ldots$ lassen sich bequem mit Hülfe der trigonometrischen Tafeln berechnen.

Entwickelt man nun die Funktion $F(r)$ in der Form

63) Den symmetrischen Fall hat *Fourier* behandelt, siehe „Théorie", chap. V sowie *Poisson,* J. éc. polyt. cah. 19, p. 112. Die Konvergenz der Reihen ist von *Cauchy* u. A. sowie neuerdings von *Fugisawa* untersucht, Diss. Strassburg 1885 „Über eine in der Wärmeleitungstheorie auftretende, nach den Wurzeln einer transcendenten Funktion fortschreitende unendliche Reihe"; auch J. of College of Scienc. of Japan 2 (1889). Im übrigen verweisen wir wegen der Konvergenzfragen auf Encykl. II A 9, Art. *Burkhardt* über Reihenentwickelungen.

$$F(r) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \lambda_n r}{r} \cdot \frac{2}{c} \cdot \frac{\lambda_n^2 + \left(h - \frac{1}{c}\right)^2}{\lambda_n^2 + h^2 - \frac{h}{c}} \int_0^c r F(r) \sin \lambda_n r \, dr,$$

so ergiebt sich für die Temperatur selbst die Formel

$$u = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \lambda_n r}{r} \cdot e^{-k\lambda_n^2 t} \cdot \frac{2}{c} \cdot \frac{\lambda_n^2 + \left(h - \frac{1}{c}\right)^2}{\lambda_n^2 + h^2 - \frac{h}{c}} \int_0^c r F(r) \sin \lambda_n r \, dr.$$

Nach längerer Zeit wird die Temperatur durch das erste Glied dieser Reihe mit genügender Annäherung dargestellt.

Eine allgemeinere Lösung der Differentialgleichung ist[64])

$$e^{-k\lambda^2 t} V_n(\theta, \varphi) \frac{J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)}{r^{\frac{1}{2}}} \quad \text{oder} \quad e^{-k\lambda^2 t} \cdot r^n V_n(\theta, \varphi) \frac{d^n}{d(r^2)^n} \frac{\sin \lambda r}{r},$$

worin $V_n(\theta, \varphi)$ eine Kugelfunktion vom Grade n bedeutet, und $J_{n+\frac{1}{2}}(\lambda r)$ die *Bessel*'sche Funktion mit der Ordnungszahl $n + \frac{1}{2}$ ist. Diese Lösung findet Anwendung, wenn die Temperatur an der Oberfläche vorgeschrieben ist, oder wenn der Körper sich durch Ausstrahlung abkühlt. Die gegebene Oberflächen- oder Aussentemperatur ist dabei in eine Reihe nach Kugelfunktionen in der Form $\sum V_n(\theta, \varphi)$ zu entwickeln.

9. Wärmeleitung in einem Kreiscylinder. Hat der leitende Körper die Form eines Kreiscylinders, so verwendet man die partielle Differentialgleichung der Wärmebewegung in der Form

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

hierin bedeutet ϱ die Entfernung von der Axe des Cylinders, φ das Azimuth und z die der Axe parallele Koordinate. Dieser Gleichung genügt die Lösung

$$u = e^{-k\lambda^2 t} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} m\varphi \cdot e^{\pm pz} \cdot J_m\left(\varrho \sqrt{p^2 + \lambda^2}\right),$$

wo $J_m(x)$ die *Bessel*'sche Funktion m^{ter} Ordnung bezeichnet, welche der gewöhnlichen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) u = 0.$$

---

64) *Poisson*, „Théorie", p. 363; *Laplace*, Connaissance des temps 1823, p. 245; Mécanique céleste, livre 11, chap. 4, 1823; *Duhamel*, J. éc. polyt. 14, chap. 22, p. 36. Siehe auch *Langer*, Habilit.-Schr. Jena (1875) „Über die Wärmeleitung in einer homogenen Kugel"; *K. Baer*, Diss. Halle 1878 „Über die Bewegung der Wärme in einer homogenen Kugel".

Zunächst werde ein Cylinder von unendlicher Länge und vom Radius a betrachtet; die Anfangstemperatur sei unabhängig von z und φ und der Cylinder von einem Medium umgeben, welches die Temperatur Null hat[65]); in diesem Fall gebrauchen wir die Lösung

$$u = e^{-k\lambda^2 t} J_0(\lambda\varrho).$$

Die Grenzbedingung laute $hu + \frac{\partial u}{\partial \varrho} = 0$; die Konstante λ lässt sich durch die Gleichung

$$hJ_0(\lambda a) + \lambda J_0'(\lambda a) = 0$$

bestimmen. *Fourier* hat nun gezeigt, dass diese Gleichung unendlich viele reelle positive Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ besitzt, und dass eine willkürlich gegebene Funktion $F(\varrho)$ sich in eine Reihe

$$\sum_{r=1}^{r=\infty} A_r J_0(\lambda_r \varrho)$$

entwickeln lässt; man findet

$$A_r = \frac{\int_0^a F(\varrho) J_0(\lambda_r \varrho)\, \varrho\, d\varrho}{\frac{1}{2} a^2 \{J_0(\lambda_r a)\}^2 \left(1 + \frac{4h^2}{\lambda_r^2}\right)}$$

Identifiziert man die hier vorkommende willkürliche Funktion $F(\varrho)$ mit der Anfangstemperatur des Cylinders, so ist die Temperatur zur Zeit t

$$u = \sum_{r=1}^{r=\infty} A_r e^{-k\lambda_r^2 t} J_0(\lambda_r \varrho).$$

Im Falle die Anfangstemperatur sowohl von ϱ als von φ abhängt, sowie im Falle eines Cylinders von endlicher Länge, kann die Lösung aus den obigen allgemeineren Lösungen zusammengesetzt werden.

Die Hauptlösung (vgl. Nr. 6) im Fall von zwei Dimensionen

$$\frac{1}{(2\sqrt{\pi k t})^2} e^{-\frac{R^2}{4kt}}$$

ist mit dem Ausdruck

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 kt} \lambda\, d\lambda \sum_{-\infty}^{\infty} J_m(\lambda\varrho) J_m(\lambda\varrho') \cos m(\varphi - \varphi')$$

äquivalent; hierin bedeutet R die Entfernung

65) *Fourier*, „Théorie", chap. VI, wo die Funktion J_0 auftritt. Die Funktionen J_m zuerst bei *Poisson*, J. éc. polyt. cah. 19 (1823), p. 239, 335. Siehe auch *Melchior*, Programm Realgymn. Fulda 1884—85.

$$\{\varrho^2 + \varrho'^2 - 2\varrho\varrho' \cos(\varphi - \varphi')\}^{\frac{1}{2}}$$

der beiden Punkte (ϱ, φ), (ϱ', φ').

Für eine ebene (*Riemann*'sche) Fläche mit einem r-fachen Windungspunkt[66]) lautet die entsprechende Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$u = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda^2 kt} \lambda \, d\lambda \sum_{-\infty}^{\infty} J_{\frac{m}{r}}(\lambda\varrho) J_{\frac{m}{r}}(\lambda\varrho') \cos \frac{m}{r}(\varphi - \varphi').$$

Im Falle $r = 2$ findet man hieraus durch Summation der Reihe

$$u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{(2\sqrt{\pi kt})^2} e^{-\frac{R^2}{4kt}} \int_{-\infty}^{\sqrt{\frac{\varrho\varrho'}{kt}} \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}} e^{-\tau^2} d\tau.$$

Diese Lösung lässt sich auf den Fall anwenden, dass die Ebene (x, y) längs eines vom Nullpunkte auslaufenden Halbstrahles aufgeschnitten ist und die Wärmebewegung in dieser aufgeschnittenen Ebene untersucht werden soll.

10. Wärmeleitung in Körpern von verschiedenen speziellen Formen. Die Aufgabe, den stationären Wärmezustand eines Ellipsoides zu ermitteln, dessen Oberfläche auf gegebener Temperatur erhalten wird, hat *G. Lamé*[67]) unter Zugrundelegung der *elliptischen Koordinaten* zuerst gelöst. Wenn

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

die Oberfläche darstellt, sind diese Koordinaten im Punkte (x, y, z) die drei positiven Wurzeln der Gleichung

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - e^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - f^2} = 1,$$

worin

$$e^2 = a^2 - b^2, \quad f^2 = a^2 - c^2;$$

66) *A. Sommerfeld,* Math. Ann 45 (1894), p. 276.

67) *G. Lamé,* J. de math. 4 (1839), p. 126. Andere Arbeiten von *Lamé*, die sich auf diesen Gegenstand beziehen, befinden sich in den sechs ersten Bänden und im Band 8 desselben Journals. Eine Übersicht über die ersten Resultate Ann. Chim. Phys. 53 (1833), p. 190. Die erste Einführung der isothermen Koordinaten geschah in einem Mémoire in den Savans étrangers 5, 1838, abgedruckt J. de math. 2 (1837), p. 147; siehe auch J. éc. polyt. cah. 23 sowie die beiden Werke „Leçons sur les fonctions inverses", Paris 1857, und „Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs applications", Paris 1859.

bezeichnet man diese Koordinaten durch ϱ, μ, ν, so genügen sie im Inneren des Ellipsoids den Bedingungen

$$a \geqq \varrho \geqq f, \quad f \geqq \mu \geqq e, \quad e \geqq \nu \geqq 0.$$

Wenn man die drei *elliptischen Integrale*

$$\xi = \int_f^{\varrho} \frac{d\varrho}{\sqrt{\varrho^2 - f^2}\sqrt{\varrho^2 - e^2}}, \qquad \eta = \int_e^{\mu} \frac{d\mu}{\sqrt{\mu^2 - e^2}\sqrt{f^2 - \mu^2}},$$

$$\zeta = \int_0^{\nu} \frac{d\nu}{\sqrt{f^2 - \nu^2}\sqrt{e^2 - \nu^2}}$$

einführt, so nimmt die Differentialgleichung der Wärmebewegung die Form an

$$(\mu^2 - \nu^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + (\varrho^2 - \nu^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + (\varrho^2 - \mu^2)\frac{\partial^2 u}{\partial \zeta^2} = 0.$$

Es wird nun gezeigt, dass diese Gleichung durch das Produkt

$$E(\varrho)\,E(\mu)\,E(\nu)$$

erfüllt wird, wo $E(\varrho)$ eine ganze Funktion vom Grade n in ϱ, $\sqrt{\varrho^2 - e^2}$, $\sqrt{\varrho^2 - f^2}$ ist, und $E(\mu)$, $E(\nu)$ dieselben Funktionen von μ, $\sqrt{\mu^2 - e^2}$, $\sqrt{f^2 - \mu^2}$, resp. ν, $\sqrt{f^2 - \nu^2}$, $\sqrt{e^2 - \nu^2}$ sind. Die Funktion E heisst eine *Lamé'sche Funktion*, und $E(\varrho)$ erfüllt die Gleichung

$$(\varrho^2 - e^2)(\varrho^2 - f^2)\frac{d^2E}{d\varrho^2} + \varrho(2\varrho^2 - e^2 - f^2)\frac{dE}{d\varrho} + [(e^2 + f^2)p - n(n+1)\varrho^2]E = 0,$$

worin p einen Parameter bezeichnet, der so zu bestimmen ist, dass die vorstehende Gleichung eine Lösung der erwähnten Art besitzt, nämlich eine ganze Funktion des n^{ten} Grades in ϱ, $\sqrt{\varrho^2 - e^2}$, $\sqrt{\varrho^2 - f^2}$. Es wird weiter gezeigt, dass es $2n + 1$ reelle verschiedene Werte von p giebt, welche der obigen Bedingung genügen, und dass daher $2n + 1$ verschiedene Funktionen $E(\varrho)$ des Grades n existieren. Dementsprechend hat man $2n + 1$ verschiedene Produkte $E(\varrho)\,E(\mu)\,E(\nu)$ zur Verfügung, die der Gleichung der Wärmeleitung Genüge leisten, und welche eindeutig und endlich im ganzen Ellipsoid sind. (Näheres über *Lamé'*sche Funktionen in Bd. II der Encykl.)

Die Aufgabe des stationären Wärmeflusses wird nun dadurch gelöst, dass die gegebene Oberflächentemperatur in eine (im allgemeinen unendliche) Summe

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{m=1}^{m=2n+1} A_{n,m} E_{n,m}(\mu)\,E_{n,m}(\nu)$$

entwickelt wird; der Temperaturzustand in einem jeden Punkte im Innern des Ellipsoids wird alsdann durch den Ausdruck

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \sum_{m=1}^{m=2n+1} A_{n,m} \frac{E_{n,m}(\varrho)}{E_{n,m}(a)} E_{n,m}(\mu) E_{n,m}(\nu)$$

dargestellt.

Die Lösung des Problems der nicht stationären Wärmebewegung in einem Ellipsoid hat *Mathieu*[68]) auf die Integration einer gewöhnlichen Differentialgleichung reduziert. Im Fall des Rotationsellipsoids[69]) reduziert sich das *Lamé*'sche Produkt auf das Produkt einer trigonometrischen Funktion und zweier Kugelfunktionen. Die nicht stationäre Wärmebewegung in einem Rotationsellipsoid hat *C. Niven*[70]) behandelt.

Die Bestimmung der Wärmebewegung in einem elliptischen Cylinder kommt auf die Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \lambda^2 u = 0$$

hinaus; setzt man $x = \mathfrak{Cof}\,\omega \cos\varphi$, $y = \mathfrak{Sin}\,\omega \sin\varphi$, so wird diese Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \omega^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \lambda^2 (\cos^2\varphi - \mathfrak{Cof}^2\,\omega)\, u = 0.$$

Eine Lösung derselben ist $u = \mathsf{E}(\omega)\,\mathsf{E}(\varphi)$, wo $\mathsf{E}(\omega)$, $\mathsf{E}(\varphi)$ den gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d^2\mathsf{E}}{d\omega^2} - (\lambda^2\,\mathfrak{Cof}^2\,\omega - p)\,\mathsf{E} = 0, \quad \frac{d^2\mathsf{E}}{d\varphi^2} + (\lambda^2 \cos^2\varphi - p)\,\mathsf{E} = 0$$

Genüge leisten; der Parameter p muss dabei so bestimmt werden, dass $\mathsf{E}(\varphi)$ in φ mit der Periode 2π periodisch wird. Diese Funktionen heissen *Funktionen des elliptischen Cylinders*[71]); durch Zusammensetzung der Produkte $e^{-\alpha t} \cos mz \cdot \mathsf{E}(\omega)\,\mathsf{E}(\varphi)$ mit $\alpha = k(m^2 + \lambda^2)$ kann der Temperaturzustand unter gegebenen Bedingungen theoretisch

68) *E. Mathieu,* Cours de physique, p. 269.

69) *G. Lamé,* J. de math. 4 (1839), p. 351; *Heine,* J. f. Math. 26 (1843), p. 185; *J. Liouville,* J. de math. 11 (1846), p. 217, 261.

70) *C. Niven,* Lond. Phil. Trans. 171 (1879), p. 117. Für den Fall des Rotationsparaboloids siehe *K. Baer,* Diss. Halle 1881.

71) *E. Mathieu* hat den ersten Versuch gemacht, diese Gleichung zu lösen, J. de math. (2) 13 (1868), p. 137—203; auch „Cours de physique mathématique", 1873, p. 122—164. In *Heine*'s „Kugelfunktionen" 1, p. 401 und 2, p. 202 findet man eine Behandlung dieser Funktionen. Siehe auch *Besser,* Zeitschr. Math. Phys. 30 (1885), p. 257, 305; *Maclaurin,* Cambr. Phil. Trans. 17 (1899), p. 41; *Lindemann,* Math. Ann. 22 (1883), p. 117.

ermittelt werden. Die entsprechenden Funktionen für den parabolischen Cylinder hat *H. Weber*[72]) entwickelt.

Der stationäre Temperaturzustand in einem von zwei nicht konzentrischen Kugeln begrenzten Raum wurde von *C. Neumann*[73]) untersucht. Derselbe Forscher[74]) hat auch die nicht-stationäre Wärmebewegung in demselben Falle behandelt; es kommen dabei die sogenannten peripolaren Koordinaten und gewisse Kugelfunktionen zur Anwendung, deren Grad die Hälfte einer ganzen Zahl ist. *Mathieu*[75]) hat sich mit dem Wärmeproblem in einem von zwei nicht-konzentrischen Kreiscylindern begrenzten Gebiet und in Cylindern mit lemniskatischem Querschnitt beschäftigt.

11. Theorie des Schmelzens und des Gefrierens bei Wärmeleitung. Man kann die Wärmeleitungstheorie auf eine Art von Problemen anwenden, bei denen die Wärmebewegung eine Änderung im Aggregatzustand des Leiters verursacht[76]).

Wenn ein Eisprisma durch die beiden Ebenen $x = 0$, $x = c$ begrenzt ist, und die Temperatur der unteren Ebene $x = 0$ konstant gleich $U (> 0)$ erhalten wird, so wird bei der Wärmebewegung das Eis allmählich in Wasser verwandelt, und es handelt sich darum, die Höhe h des geschmolzenen Teils des Prismas zu irgend einer Zeit t zu bestimmen, nachdem das Schmelzen angefangen hat. Es bezeichne λ die Schmelzwärme der Volumeneinheit des Eises, so wird in der Zeit dt die Wärmemenge $-\varkappa \frac{\partial u}{\partial x} dt$ darauf verwendet, das Eis auf einer Länge dh des Prismas in Wasser zu verwandeln, wobei die Temperatur zunächst den Nullwert beibehält; wir erhalten also

$$-\varkappa \frac{\partial u}{\partial x} dt = \lambda\, dh, \quad \text{für } x = h.$$

Nun genügt der Ausdruck

---

72) *H. Weber,* Math. Ann. 1 (1869), p. 31, siehe auch *K. Baer,* Progr. Realgymn. Küstrin, 1883.

73) *C. Neumann,* Allgemeine Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von irgend zwei nicht konzentrischen Kugelflächen begrenzt wird, Halle 1862. Vgl. *Heine,* „Kugelfunktionen" 2, p. 261. Siehe auch *Frosch,* Zeitschr Math. Phys. 17 (1872), p. 498.

74) *C. Neumann,* Theorie der Elekrizitäts- und Wärmeverteilung in einem Ringe, Halle 1864. Siehe auch *Hicks,* „Toroidal functions", Lond. Phil. Trans. 172 (1882), p. 609.

75) *E. Matthieu,* Par. C. R. 68 (1869), p. 590; J. de math. (2) 14 (1869), p. 65.

76) *L. Saalschütz,* Astr. Nachr. Nr. 1321 (1861), § 12 ff.; *J. Stefan,* Wien. Ber. 98^{2a} (1889), p. 473, 616, 965 und Monatshefte f. Math. u. Phys., 1. Jahrg. 1890, p. 1.

$$u = A\int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\alpha} e^{-z^2}\,dz$$

einerseits der partiellen Differentialgleichung der Wärmebewegung, andererseits lässt er sich bei geeigneter Bestimmung von A und α den Nebenbedingungen unseres Problems anpassen, wobei das vom Wasser erfüllte Gebiet durch die Bedingung $0 \leqq \frac{x}{2\sqrt{kt}} \leqq \alpha$ zu umgrenzen ist. Da $u = U$ für $x = 0$ und $u = 0$ für $x = h$, so ist zu setzen:

$$h = 2\alpha\sqrt{kt}, \quad U = A\int_0^{\alpha} e^{-z^2}\,dz,$$

und die obige Bedingung für die Stelle $x = h$ giebt

$$A\varkappa e^{-\alpha^2} = 2k\alpha\lambda.$$

Die Höhe $h = 2\alpha\sqrt{kt}$ lässt sich daher aus der Gleichung

$$\alpha e^{\alpha^2}\int_0^{\alpha} e^{-z^2}\,dz = \frac{\varkappa U}{2k\lambda}$$

bestimmen; es ist dies eine transcendente Gleichung für α, deren Wurzeln mit Hülfe von numerischen Tafeln[77]) berechnet werden können.

Wenn die Ebene $x = 0$ eine gegebene unter dem Gefrierpunkt liegende Temperatur U_1 hat, und in unendlicher Tiefe die über dem Gefrierpunkt liegende Temperatur U_2 gleichfalls gegeben ist[78]), so dringt der Frost in das Wasser allmählich vor; die Geschwindigkeit, mit welcher dieses geschieht, lässt sich alsdann durch eine ähnliche Methode bestimmen, wie die soeben angedeutete.

12. Wärmeleitung und innere Reibung in einer bewegten Flüssigkeit. Sind die Teilchen einer Flüssigkeit in relativer Bewegung, so wird Wärme durch die innere Reibung erzeugt und in der Flüssigkeit fortgeleitet. In diesem Fall[79]) muss noch besonders festgesetzt werden, was man unter der Temperatur in einem Punkt der Flüssigkeit zu verstehen hat, da die Temperatur hier nicht auf die gleiche Weise gemessen werden kann, wie bei einem Körper, dessen Teilchen

77) Vgl. Anm. 46.

78) Die Lösung dieser Aufgabe befindet sich im *Riemann-Weber*'schen Buch 2, p. 118—122.

79) Diese Theorie hat *Kirchhoff* aufgestellt, siehe seine „Vorlesungen über die Theorie der Wärme", Leipzig 1894, p. 113.

sich in relativer Ruhe befinden. Die Temperatur wird nun durch den Satz definiert, dass die Energie einer bewegten unendlich kleinen Flüssigkeitsmasse gleich ist ihrer lebendigen Kraft plus der Energie, die sie in der Ruhe bei gleicher Dichtigkeit und gleicher Temperatur haben würde. Es sei ϱ die Dichtigkeit, u, v, w die Komponenten der Geschwindigkeit des Flüssigkeitsteilchens an der Stelle (x, y, z), T die Temperatur daselbst, γ_v die spezifische Wärme bei konstantem Volumen, M eine Konstante der Flüssigkeit, die wir „Dilatationswärme" nennen können und die das Verhältnis $dQ/d\varrho$ bei konstant gehaltener Temperatur bedeutet; dann besteht die Gleichung

$$-M\frac{\partial\varrho}{\partial t}+\gamma_v\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{1}{\varrho}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{\partial T}{\partial z}\right)\right\}$$
$$+\frac{1}{\varrho}\Big[\mu\left\{2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+2\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+2\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2\right\}-2\mu'\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\Big],$$

worin μ, μ' zwei von der Beschaffenheit der Flüssigkeit (Viskosität und Kompressibilität) abhängende Konstanten bedeuten; ist die Flüssigkeit inkompressibel, so verschwindet μ' aus der Gleichung; $\varkappa$ bezeichnet wie sonst die Wärmeleitungsfähigkeit.

An der Grenzfläche, wo zwei Flüssigkeiten, oder eine Flüssigkeit und ein fester Körper sich berühren, müssen Grenzbedingungen durch besondere Voraussetzungen aufgestellt werden; diese bestehen zum Teil aus Annahmen über die Druckkomponenten in den beiden Substanzen und die Art und Weise, wie sie von der relativen Bewegung der beiden Substanzen an der Grenzfläche abhängen. Die Temperaturbedingungen, die an der Grenzfläche zu erfüllen sind, lauten

$$T=T',$$
$$\varkappa\frac{\partial T}{\partial n}-\varkappa'\frac{\partial T'}{\partial n}=-\lambda\{(u-u')^2+(v-v')^2+(w-w')^2\},$$

worin λ eine Konstante, welche die sogenannte äussere Reibung misst, und dn ein zur Grenzfläche senkrechtes Linienelement bezeichnet. Die Theorie der Wärmeleitung in Gasen hat ihre Stelle in der kinetischen Gastheorie.

13. Diffusion. Wenn sich zwei verschiedene Flüssigkeiten oder Gase in demselben Gefässe befinden, und die beiden Substanzen anfangs getrennt waren, so durchdringen sie sich allmählich, so dass nach theoretisch unendlicher Zeit eine homogene Mischung der beiden Substanzen entstanden ist; dieser Vorgang heisst Diffusion.

Die Theorie der Diffussion zweier Flüssigkeiten, von welchen die

eine etwa eine Salzlösung und die andere das Lösungsmittel ist, hat zuerst *Fick*[80]) durch die Annahme zu begründen gesucht, dass die freie Diffusion (d. h. eine solche, die ohne Scheidewand vor sich geht) nach demselben Gesetz stattfindet, wie die Verbreitung der Wärme in Leitern. Wenn das Gefäss ein cylindrisches ist, mit vertikaler Axe, und die Flüssigkeiten übereinander geschichtet sind, so befinden sie sich in allen Punkten einer Horizontalebene im gleichen Zustand prozentualer Mischung. Es wird angenommen, dass die Salzmenge dS, die in der Zeit dt einen Horizontalschnitt F durchsetzt, proportional mit $F dt$ und mit dem Konzentrationsgefälle $\partial u/\partial x$ an der betreffenden Stelle sei; unter der Konzentration u versteht man dabei die Gewichtsmenge Salz in der Volumeinheit der Lösung; die Koordinate x ist in einem cylindrischen Gefäss parallel der Axe desselben zu messen. Man erhält unter dieser Annahme

$$dS = kF \frac{\partial u}{\partial x} dt,$$

worin die „Diffusionskonstante" k von der Natur des Salzes und des Lösungsmittels abhängt. Der Salzzuwachs in einer Schicht von der Dicke dx während der Zeit dt wird entsprechend

$$kF \frac{\partial^2 u}{dx^2} dt\, dx.$$

Da dieser Zuwachs andererseits gleich der zeitlichen Konzentrationsänderung $\frac{\partial u}{\partial t} dt$ multipliziert in das Volumen $F dx$ der Schicht ist, so erhalten wir dieselbe Gleichung wie in der Theorie der linearen Wärmeleitung, nämlich

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Die mathematische Behandlung des beschriebenen Diffusionsvorganges ist daher im wesentlichen ähnlich dem der Wärmeleitung; nur sind die Oberflächenbedingungen andere, da sie vom osmotischen Druck abhängen.

Dass der *Fick*'sche Ansatz annähernd richtig ist, hat *H. F. Weber*[81]) nachgewiesen. Eine Molekulartheorie der Diffusion, auf dem Begriff des osmotischen Drucks basiert, hat *Nernst*[82]) aufgestellt. *Maxwell*[83]) leitete aus der kinetischen Gastheorie ab, dass die freie Diffusion der Gase sich durch dieselbe Differentialgleichung wie bei den Flüssig-

80) Ann. Phys. Chem. 49 (1855), p. 59. Über Diffusion siehe auch *Maxwell*'s „Theory of heat", p. 273.

81) Ann. Phys. Chem. 7 (1879), p. 469, 536.

82) Zeitschr. f. phys. Chemie 2 (1888), p. 611.

83) Phil. Mag. (4) 35 (1868), p. 129, 185.

keiten darstellen lässt; dasselbe hat *Stefan*[84]) auf Grund der Prinzipien der Hydrodynamik gezeigt. Auch hat *Stephan* die Diffusion eines Gases durch eine Flüssigkeit behandelt.

Eine der Wichtigkeit des Gegenstandes angemessene, ausführliche Behandlung der Diffusion muss an dieser Stelle unterbleiben; vgl. dazu den Art. *Van't Hoff* über physikalische Chemie.

II. Physikalischer Teil (Messmethoden).

14. Zweck der Messungen. Mit den ersten Messungen, welche *Biot*, *Fourier* und deren Nachfolger über den Vorgang der Wärmeleitung anstellten, bezweckten ihre Urheber eine Prüfung der formalen Theorie der Wärmeleitung und zugleich eine Orientierung über das Verhalten der verschiedenen Substanzen bei dem Durchgang von Wärme. Dieser doppelte Zweck ist heute nicht mehr in gleicher Weise massgebend.

Die formale Theorie, d. h. die ihr zu Grunde liegende *Biot-Fourier*'sche Voraussetzung über die Proportionalität zwischen Wärmefluss und Temperaturgefälle, ist durch zahlreiche und nach sehr verschiedenen Methoden durchgeführte Versuche in weiten Grenzen sicher gestellt. Auch die mathematische Durchführung ist so weit fortgeschritten, dass die formale Wärmeleitungstheorie als eine in der Hauptsache abgeschlossene Disziplin angesehen werden kann.

Ein erhöhtes Interesse hat dafür der andere Zweck erhalten, in den gemessenen Wärmeleitungskonstanten charakteristische Eigenschaften bestimmter Substanzen zu gewinnen. Während nämlich die formale Wärmeleitungstheorie für den Fortschritt der allgemeinen Physik, d. h. für die Erkenntnis des Zusammenhanges der Erscheinungen nicht direkt, sondern nur als ein allerdings sehr vorzügliches Hülfsmittel Bedeutung hat, sind heute nicht nur für Gase in der kinetischen Theorie, sondern auch für Metalle in der Elektronentheorie Anfänge zu tiefer begründeten Vorstellungen über die Natur der Wärmeströmung enthalten, die ein ausgedehntes und sicheres Zahlenmaterial wünschenswert machen. Für diesen Zweck sind nun die meisten älteren Beobachtungen nicht zu verwenden, weil nur selten die Definition der Substanz ausreichend gegeben ist. Erst in neuester Zeit hat sich herausgestellt, dass die Wärmeleitung der Metalle gegen geringe Beimengungen eine ebensolche Empfindlichkeit zeigt, wie sie für das elektrische Leitvermögen seit den Versuchen *Matthiessen*'s

84) Wien. Ber. 77 (1878), p. 371.

bekannt ist, sodass selbst eine sorgfältige chemische Analyse zur Definition häufig nicht ausreicht (vgl. Nr. **31**). Im allgemeinen sind daher solche Methoden vorzuziehen, welche es gestatten, alle für die Theorie in Betracht kommenden, insbesondere also die elektrischen Eigenschaften, an demselben Stück und in möglichst weiten Temperaturgrenzen zu bestimmen.

Im Zusammenhang mit den physikalischen Untersuchungen über Wärmeleitung stehen manche aus Anforderungen der Technik entstandene Fragen, wie die nach dem Wärmedurchgang durch Heizflächen (s. Nr. **18**), nach dem Wärmeschutz von Dampfrohren, auch wohl das Problem der Wärmeverluste im Cylinder der Dampfmaschine, die vor allem auf einer nicht gewünschten periodischen Condensation und Wiederverdampfung an der Cylinderwand beruhen[85]).

15. Grundlagen und Voraussetzungen. Wie in Nr. **2** dargelegt ist, kann der Übergang der Wärme in dem zu untersuchenden Medium durch Strahlung, Leitung und Konvektion erfolgen. Die innere Ausstrahlung erreicht nun bei den gewöhnlichen Wärmeleitungsproblemen keinen bemerkenswerten Betrag; daher lässt sich die durchgehende Strahlung, sofern nicht bei manchen Gasen Absorption in Frage kommt, als einfach superponierter Vorgang behandeln[86]). Die Wärmeübertragung durch Konvektion wird, wo dies nötig ist, durch die Versuchsanordnung auf einen nicht mehr störenden Betrag herabgemindert. So kann man im allgemeinen und insbesondere stets bei festen Körpern den Methoden zur Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit einen reinen Leitungsvorgang zu Grunde legen.

Der bequemeren Bezugnahme wegen stellen wir die Grundlagen der Wärmeleitungstheorie, die in Nr. **2** und **3** entwickelt wurden, hier nach den Gesichtspunkten zusammen, die für das Folgende maassgebend sind.

Nach dem grundlegenden *Biot-Fourier'schen Ansatze* fliesst in einem homogenen isotropen Medium in der Zeit dt durch das auf der Richtung n senkrechte Flächenelement dF, wenn u die Temperatur angiebt, eine Wärmemenge

$$\text{(I)} \qquad dQ = -\varkappa \frac{\partial u}{\partial n} dF\, dt;$$

(s. Gl. (1) und (2) in Nr. **2**). Durch diesen Ansatz ist die Wärmeleitungskonstante $\varkappa$ (Wärmeleitfähigkeit, Wärmeleitvermögen) definiert.

85) *H. L. Callendar* und *J. T. Nicolson*, Engineering 64 (1897), p. 678.

86) Ein Versuch zur Aufstellung einer gemeinsamen Theorie der Leitung und Strahlung ist von *R. A. Sampson* und ausführlicher von *A. Schuster* unternommen (Phil. Mag. 5 (1903), p. 243).

Durch Hinzunahme des Begriffs der spezifischen Wärme γ erhält man aus (I) mit *Fourier* die Differentialgleichung der Wärmeleitung (Gl. (5) in Nr. **3**)

$$\text{(II)} \qquad \gamma\varrho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\varkappa\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

wo ϱ die Dichte bedeutet. Zur Vereinfachung der Rechnung werden meist, aber keineswegs immer, die Konstanten $\varkappa$, γ und ϱ als unabhängig von der Temperatur angenommen, wodurch die Differentialgleichung unter Einführung des Temperaturleitvermögens (Gl. (7) in Nr. **3**)

$$\text{(III)} \qquad k = \frac{\varkappa}{\gamma\varrho}$$

die Form erhält (Gl. (6) in Nr. **3**)

$$\text{(IV)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = k\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\}.$$

Die Annahme der Konstanz von $\varkappa$ und γ ist für genauere Untersuchungen nicht ohne weiteres zulässig. Während sie bei reinen Metallen meist ziemlich nahe zutrifft, kann bei Legierungen die Änderung von $\varkappa$ leicht 2 bis 3 Tausendstel pro 1^0 betragen (vgl. Nr. **31**). Häufig führt man für beide Grössen eine lineare Abhängigkeit von der Temperatur in die Rechnung ein. Dagegen kann die Berücksichtigung der Wärmeausdehnung wohl stets ohne merklichen Fehler unterbleiben.

Bei der praktischen Durchführung kann man im allgemeinen nicht verhindern, dass Wärmeströmung aus der Umgebung den zu messenden Vorgang stört. Man ist deswegen genötigt, über den Wärmeaustausch zwischen dem Versuchskörper und seiner Umgebung eine neue Voraussetzung zu machen, was gewöhnlich durch die Annahme des *Newton*'schen Abkühlungsgesetzes geschieht. Darnach wird die von dem Körper an das umgebende Medium (etwa eine lebhaft bewegte Flüssigkeit) abgegebene Wärme proportional der Temperaturdifferenz zwischen der Oberfläche des Körpers und dem Medium gesetzt. Die Proportionalitätskonstante und eventuell eine genauere Beziehung muss durch besondere Hülfsmessungen ermittelt werden. Durch Verbindung mit dem *Biot-Fourier*'schen Ausdruck für den Wärmefluss liefert das *Newton*'sche Abkühlungsgesetz die Oberflächenbedingung (Gl. (4) in Nr. **2**)

$$\text{(V)} \qquad -\varkappa\frac{\partial u}{\partial n} = H(u - u_0),$$

wo n die Richtung der Normale von der Oberfläche nach aussen, u_0 die Aussentemperatur und H die äussere Wärmeleitfähigkeit ist.

In einem wichtigen Fall, nämlich wenn der Leiter die zur Messung der Wärmeleitfähigkeit und zugleich des elektrischen Leitvermögens besonders günstige Stabform besitzt, ist zumeist mit grosser Näherung eine Voraussetzung erfüllt, welche es ermöglicht, das *Newton*sche Abkühlungsgesetz direkt in die Differentialgleichung der Wärmeleitung aufzunehmen, sodass keine besondere Oberflächenbedingung für die Seiten des Stabes zu erfüllen bleibt. Diese Voraussetzung ist, dass innerhalb des Stabquerschnittes nur geringe Temperaturunterschiede vorkommen. Man erhält dann aus der ursprünglichen die neue Differentialgleichung auf folgende Weise[87]).

Die Axe des Stabes sei die x-Axe des Koordinatensystems. Man multipliziere die Gleichung (IV) mit $dy\,dz$ und integriere über den Stabquerschnitt q, dessen Randelement ds ist. Dabei wird

$$\int\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)dy\,dz=\int\frac{\partial u}{\partial n}\,ds=-\frac{H}{\varkappa}\int(u-u_0)\,ds$$

und, wenn u' die Mitteltemperatur im Querschnitt, u'' die Mitteltemperatur auf dem Umfang p des Querschnitts, $h=\frac{Hp}{\gamma\varrho q}$ eine Konstante bedeutet,

$$\frac{\partial u'}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}-h(u''-u_0).$$

Wenn angenähert $u''=u'$ ist, kann für die Mitteltemperatur des Querschnitts die Differentialgleichung der linearen Wärmeleitung (s. Nr. **5**, Gl. (15)) angenommen werden:

$$\text{(VI)}\qquad \frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-h(u-u_0),$$

wobei sich die Konstante

$$\text{(VII)}\qquad h=\frac{Hp}{\gamma\varrho q}$$

als „äussere Temperaturleitfähigkeit eines linearen Leiters" definieren lässt[88]). Der relative Einfluss der äusseren Wärmeleitung (und damit zugleich der erforderliche Grad der Annäherung $u''=u'$) wird um so geringer, je grösser das erste Glied auf der rechten Seite von (VI) gegen das zweite ist, und dies ist unter sonst gleichen Bedingungen um so mehr der Fall, je grösser $\frac{\partial u}{\partial t}$ ist, je mehr also der augenblick-

87) *Kirchhoff*, Vorlesungen über die Theorie der Wärme, Leipzig 1894, p. 33.

88) In Teil I ist dafür h' gesetzt zur Unterscheidung von der äusseren Temperaturleitfähigkeit eines körperlichen Leiters $h=\frac{H}{\varkappa}$.

liche Zustand vom stationären Endzustand abweicht. Bei den Messungen ist dieser Umstand wohl zu beachten.

Zu diesen Grundlagen der nachfolgenden Methoden treten da, wo die Grenzfläche zweier Leiter (1) und (2) in Betracht kommt, die *Fourier*'schen Stetigkeitsbedingungen (Gl. (3) in Nr. 2), dass längs der Grenzfläche (mit der Normalen n) gilt:

$$\text{(VIII)} \qquad u_1 = u_2 \quad \text{und} \quad \varkappa_1 \frac{\partial u_1}{\partial n} = \varkappa_2 \frac{\partial u_2}{\partial n}.$$

Für nicht isotrope Medien endlich bilden den Ausgangspunkt die allgemeineren Gesetze der Wärmebewegung, welche *Duhamel* aufgestellt hat (vgl. Nr. 4).

16. Allgemeine Übersicht über die Methoden. Die Definition der Wärmeleitungskonstante vermittelst der *Biot-Fourier*'schen Grundannahme enthält vier verschiedene Grössen: Wärmemenge, Temperatur, Länge und Zeit. Zur absoluten Bestimmung des Wärmeleitvermögens sind diese vier Grössen absolut zu messen. Will man nur das Verhältnis der Leitfähigkeiten zweier Medien haben, so brauchen die genannten vier Grössen bei beiden Substanzen ebenfalls nur relativ zueinander bekannt zu sein.

Die Methoden schliessen sich an spezielle Lösungen der Gleichung (II) bezw. (IV) oder (VI) an. Eine Gruppe entspricht den Lösungen für $\partial u/\partial t = 0$, d. h. dem stationären Zustand. Da hier die Wärmeleitungskonstante aus der Gleichung (IV) fortfällt, müssen diese Methoden zugleich auf die Definition von $\varkappa$ (Gl. I) zurückgehen (*Péclet*), oder von $\varkappa$ abhängige Grenzbedingungen, wie (V), bezw. die dadurch entstandene Gleichung (VI) benutzen (*Despretz*). Bei den hierher gehörenden absoluten Methoden werden die vier Definitionsgrössen direkt gemessen.

Eine zweite Gruppe von Methoden (*Forbes*, *Angström*, *Neumann* u. a.) benutzt von der Zeit abhängende Lösungen, welche den Vorteil geringer Abhängigkeit von der äusseren Wärmeleitung selbst bei Stabform besitzen (vgl. Nr. **15**). Die absolute Bestimmung liefert dabei aus Temperatur-, Zeit- und Längenmessung das Temperaturleitvermögen $k = \varkappa/\gamma\varrho$. Die direkte Messung der Wärmemenge fällt fort und an ihre Stelle tritt eine gesonderte Bestimmung der spezifischen Wärme, wenn man aus dem Temperaturleitvermögen das Wärmeleitvermögen erhalten will. Auch die Temperaturmessung ist bei diesen Methoden vereinfacht, da man zur Berechnung von k nur das Verhältnis zweier Temperaturen zu kennen braucht, also irgend eine der Temperatur proportionale Grösse, wie die elektromotorische Kraft eines Thermo-

elementes, zur Messung ausreicht. Die *absolute* Temperaturbestimmung ist gleichfalls in der Bestimmung der spezifischen Wärme enthalten.

Als Nullpunkt der Temperaturskala wird bei diesen Methoden zweckmässig die Umgebungstemperatur genommen, d. h. die Temperaturdifferenz gegen diese in Rechnung gesetzt. Die Differentialgleichung (VI) reduziert sich dann auf

$$\text{(IX)} \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu.$$

In neuerer Zeit hat *F. Kohlrausch* eine Beziehung zwischen Temperatur und Potential bei elektrischer Heizung angegeben und gezeigt, wie sie zur Messung der Wärmeleitung benutzt werden kann. Die Methoden, welche hierauf beruhen, liefern das Verhältnis des Wärmeleitvermögens zum elektrischen Leitvermögen und erfordern keine Ausmessung der Dimensionen.

Als Grundlage relativer Wärmeleitungsmethoden sind von *Voigt* die Stetigkeitsbedingungen (VIII) an der Grenzfläche zweier Medien benutzt.

Naturgemäss sind die Methoden sehr verschieden, je nachdem sie sich auf feste, flüssige oder gasförmige Körper beziehen. Nur bei den Methoden für feste Körper, besonders für die gutleitenden Metalle, tritt die mathematische Seite in den Vordergrund, während bei den übrigen das Interesse sich vorwiegend an experimentelle Fragen heftet. Daher sollen hier nur die ersteren Methoden besprochen werden und auch von diesen nur solche aus dem Gebiete der reinen Wärmeleitung. Die oben erwähnten elektrischen Methoden werden im Zusammenhang mit den zugehörigen theoretischen Betrachtungen in dem Art. „Beziehungen der elektrischen Strömung zu Wärme und Magnetismus“ behandelt.

17. Methode von Péclet (1841). Die erste Methode, welche geeignet erschien, absolute Werte des Wärmeleitvermögens zu liefern, ist von *Péclet* angegeben[89]). Dieser untersuchte den Wärmedurchgang durch Platten, welche durch Wasserspülung auf beiden Seiten auf verschiedener Temperatur gehalten wurden. Die äussere Wärmeleitung durch den Rand der dünnen Platte ist dabei so gering, dass sie ausser Betracht bleiben kann. Dem Vorgang entspricht das einfache Integral von (IV) $u = Ax + B$, wo die x-Axe normal zur Platte ist. Bedeuten u_1 und u_2 die Temperaturen der Endflächen und d die Dicke

89) *E. Péclet*, Ann. chim. phys. (3) 2 (1841), p. 107; Ann. Phys. Chem. 55 (1842), p. 167.

der Platte, so folgt darnach aus (I) für die in der Zeit t durch den Querschnitt F tretende Wärmemenge

$$Q = -\varkappa \frac{u_2 - u_1}{d} Ft.$$

Diese Menge fand *Péclet* aus der Temperaturänderung und Menge des Spülwassers. Das Temperaturgefälle berechnete er aus der Temperaturdifferenz des Wassers auf beiden Seiten und der Dicke der Platte, indem er annahm, dass jede Plattenoberfläche die Temperatur des Spülwassers besitze. Diese Annahme trifft jedoch, selbst wenn man die wirksamste Rührvorrichtung benutzt, nicht einmal angenähert zu (vgl. Nr. **18**).

Um von dem unbekannten Grenzvorgang unabhängig zu werden, hat *E. H. Hall* bei der Anordnung *Péclet*'s die Temperaturdifferenz der Oberflächen thermoelektrisch bestimmt, indem er die Platte selbst als Glied der Thermokette benutzte[90]).

Insbesondere für schlechte Wärmeleiter hat die im Prinzip so einfache Methode mannigfaltige experimentelle Ausgestaltung erfahren.

18. Wärmedurchgang durch Heizflächen. Der störende Grenzvorgang bei den *Péclet*'schen Versuchen kommt dadurch zustande, dass die an eine feste Wand grenzenden Wasserschichten infolge der Reibung nur langsam und parallel der Wand fliessen und daher nur wenig Wärme durch Konvektion fortführen können. Der Hauptteil der Wärme muss durch Leitung hindurchdringen, was wegen der schlechten Leitfähigkeit des Wassers nur geschehen kann, wenn ein starkes Temperaturgefälle und daher eine erhebliche Temperaturdifferenz zwischen der festen Oberfläche und der Hauptmasse des Wassers vorhanden ist. Dieser komplizierte Vorgang an der Grenze von Metall und Flüssigkeit ist lange Zeit übersehen oder an Einfluss unterschätzt worden; er hat nicht nur die Resultate *Peclet*'s völlig entstellt, sondern auch sehr viele spätere und nach anderen Methoden angestellte Beobachtungen fehlerhaft gemacht. Zum eigentlichen Gegenstand der Untersuchung wurde er bei der Frage nach dem Wärmedurchgang durch Heizflächen. Dabei hat sich ergeben, dass bei starkem Rühren der Temperatursprung zwischen Metalloberfläche und Hauptflüssigkeitsmasse proportional ist der hindurchtretenden Wärmemenge, dass man also von einem durch die letzten Wasserschichten gebildeten Übergangswiderstand reden kann. Nach den Versuchen von *Austin*[91]) ist dieser Übergangswiderstand bei nicht gerührtem

90) *E. H. Hall*, Proc. of the Americ. Acad. of Arts a. Sciences 31 (1896), p. 271.
91) *L. Austin*, Zeitschr. des Ver. Deutsch. Ing. 46 (1902), p. 1890.

siedenden Wasser äquivalent einer Eisenschicht von 1,2 bis 2 cm Dicke. Durch starkes Rühren wurde er auf 0,75 cm Eisen vermindert. Nicht gerührtes und nicht siedendes Wasser gab einen Widerstand bis zu 10 cm Eisen.

19. Methode von Berget (1887). *A. Berget*[92]) ging von derselben Formel aus wie *Péclet*, benutzte aber als Versuchskörper einen längeren Cylinder und umgab ihn zur Vermeidung der Wärmeabgabe durch die Mantelflächen mit einem konzentrischen Hohlcylinder, der ebenso wie der zur Messung benutzte innere Cylinder von Wärme durchströmt wurde.

20. Methode von Despretz (1822) und Forbes (1852). Lange ehe *Péclet* die erste Methode zur *absoluten* Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit angab, hatte *Despretz*[93]) die erste exakte Methode für *relative* Messungen gebracht, die später von *Forbes*[94]) zu einer absoluten ergänzt wurde. Das Wärmeleitungsproblem, welches *Despretz* benutzte, ist zugleich das erste, welches eine mathematische Behandlung und zwar schon vor *Fourier* von *Biot* erfahren hat.

Ein Stab wird an beiden Enden auf konstanter Temperatur gehalten und eine konstante Aussentemperatur hergestellt. Dem entspricht die Lösung der Differentialgleichung (IX) für stationären Zustand (vgl. Nr. 5b)

$$u = C_1 e^{x\sqrt{\frac{h}{k}}} + C_2 e^{-x\sqrt{\frac{h}{k}}}.$$

Man misst in drei äquidistanten Querschnitten die Temperaturdifferenzen u_1, u_2, u_3 gegen die Umgebung, setzt $n = \frac{u_1 + u_3}{2u_2}$ und erhält, wenn l den Abstand zwischen den Querschnitten 1, 2 oder 2, 3 bezeichnet,

$$l^2 \frac{h}{k} = [\log \text{nat}\,(n + \sqrt{n^2 - 1})]^2, \tag{X}$$

oder[95]) nach der Definition von k und h (III und VII),

$$l^2 \frac{Hp}{q\varkappa} = [\log \text{nat}\,(n + \sqrt{n^2 - 1})]^2.$$

Für einen Stab aus anderem Material, aber von denselben Dimensionen und derselben Oberflächenbeschaffenheit (z. B. Vernickelung), erhält man eine analoge Gleichung, in welcher der Faktor $\frac{l^2 Hp}{q}$ unverändert

92) *A. Berget*, Par. C. R. 105 (1887), p. 224.

93) *C. M. Despretz*, Ann. chim. phys. 19 (1822), p. 97; 36 (1828), p. 422; Ann. Phys. Chem. 12 (1828), p. 281.

94) *J. D. Forbes*, Rep. of Brit. Assoc. (1852); Edinburg Trans. 23 (1862), p. 133; 24 (1865), p. 75.

ist. Die Elimination desselben liefert das Verhältnis der Wärmeleitfähigkeiten $\varkappa$ für die beiden Stäbe.

Der Wert n, welcher beobachtet wird und die Abweichung der Temperatur der Mitte von der Mitteltemperatur der Enden darstellt, ist nach (X) unabhängig davon, ob die beiden Enden auf gleicher oder verschiedener Temperatur gehalten werden. Am günstigsten ist es, gleiche Temperatur zu wählen, weil dann nur kleine Temperaturunterschiede im Stabe vorkommen und daher sowohl für die innere als für die äussere Wärmeleitfähigkeit die Abhängigkeit von der Temperatur nicht in Frage kommt[96]).

Die Methode von *Forbes* lässt sich so darstellen, dass man zu der von *Despretz* benutzten Lösung der Differentialgleichung (IX) eine zweite hinzunimmt. Diese betrifft den Fall, dass die Temperatur stets in allen Querschnitten gleich ist, d. h. die einfache Erwärmung oder Abkühlung des ganzen Stabes. Dann fällt das Glied mit $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ aus (IX) fort und man erhält das Integral

$$u = Ce^{-ht}.$$

Die Beobachtung der Temperatur als Funktion der Zeit liefert den Wert h, den man in die *Despretz*'sche Formel (X) einsetzen muss, um das Temperaturleitvermögen k absolut zu erhalten[97]).

Die äussere Wärmeleitung, die bei den meisten Methoden nur als störender Faktor auftritt und in einer Korrektion berücksichtigt

---

95) Mit grosser Annäherung kann auch geschrieben werden

$$l^2 \frac{h}{k} = \frac{u_1 + u_3 - 2u_2}{u_2 + \frac{1}{12}(u_1 + u_3 - 2u_2)}.$$

96) *Biot* und *Despretz* erwärmten bei ihren Versuchen nur ein Ende des Stabes; dadurch sind auch die nachfolgenden Experimentatoren zu derselben nicht zweckmässigsten Anordnung gekommen.

97) Nach den Methoden von *Despretz* und *Forbes* sind mehrfach wichtige Bestimmungen ausgeführt, die zugleich ein Bild der fortschreitenden experimentellen Verbesserung geben. Zunächst bilden *Despretz*'s eigene Versuche (l. c.) die erste quantitative Vergleichung der Wärmeleitung verschiedener Substanzen. Zur Temperaturmessung wurden dabei Quecksilberthermometer in entsprechend grosse Ausbohrungen der Stäbe gesetzt. Eine weit präzisere Definition des Ortes erlaubt die von *Chr. Langberg* (Ann. Phys. Chem. 66 (1845), p. 1) bei der Messung der Wärmeleitung eingeführte Benutzung von Thermoelementen, zu denen man heute Drähte von $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{20}$ mm Durchmesser verwendet.

G. Wiedemann und *R. Franz* fanden mit einer verbesserten Anordnung der *Despretz*'schen Methode das nach ihnen benannte Näherungsgesetz von der Proportionalität der metallischen Leitvermögen für Wärme und Elektrizität (vgl. Nr. **31**).

wird, ist bei der *Despretz-Forbes*'schen Methode zur Grundlage der Messung gemacht und muss daher bei der experimentellen Ausführung sehr sorgfältig definiert sein, wenn die Methode brauchbare Resultate liefern soll (vgl. Nr. **21**).

21. Äussere Wärmeleitung. Die Erscheinungen, an welchen *Péclet*'s Versuche scheiterten und die in Nr. **18** als „Wärmedurchgang durch Heizflächen" besprochen sind, lassen sich als äussere Wärmeleitung zwischen einem Metall und einer lebhaft bewegten Flüssigkeit auffassen und treten als solche in den Methoden Nr. **24** und **26a** auf, jedoch ohne dort in der entsprechenden Weise Berücksichtigung zu finden. Die bei den Methoden vorhandenen Mängel mögen hierauf zurückzuführen sein.

Die äussere Wärmeleitung zwischen einem festen Leiter und einem Gas, auf welcher *Despretz*'s Versuche beruhen, und die bei den meisten Methoden von Wichtigkeit ist, setzt sich aus Leitung, Strahlung und Konvektion zusammen. Versuche, den Einfluss der Konvektion rechnerisch zu bestimmen, sind von *Oberbeck*[98]) und *Lorenz*[99]) gemacht. Der letztere kommt zu dem einfachen Resultat, dass für eine vertikale Platte vom Temperaturüberschuss u über die Umgebung der von Leitung und Konvektion herrührende Betrag der äusseren Wärmeleitung proportional $u^{\frac{5}{4}}$ gesetzt werden kann[100]). Bei Berücksichtigung der Strahlung nach dem *Stefan-Boltzmann*'schen Gesetz ergiebt sich für den Gesamtbetrag der äusseren Wärmeleitung, wenn T und T_0 die absoluten Temperaturen der Oberfläche und der Umgebung sind,

$$\sigma(T^4 - T_0^4) + \eta(T - T_0)^{\frac{5}{4}}.$$

Experimentell lässt sich die Konvektion durch hinreichendes Evakuieren der Umgebung beseitigen. Der Betrag der übrig bleibenden Leitung und Strahlung kann dann für gegebene Räume berechnet werden.

Aus einer Kugel vom Radius R und der absoluten Temperatur T gelangt zu einer umgebenden konzentrischen Hohlkugel vom Radius R_0 und der Temperatur T_0 in der Zeiteinheit durch Leitung die Wärmemenge

$$Q_L = 4\pi\varkappa \frac{RR_0}{R_0 - R}(T - T_0)$$

98) *A. Oberbeck,* Ann. Phys. Chem. 7 (1879), p. 271.

99) *L. Lorenz,* Ann. Phys. Chem. 13 (1881), p. 582.

100) *Dulong* und *Petit* (Ann. chim. phys. 7 (1817), p. 225 u. 337) hatten experimentell eine ähnliche Formel mit dem Exponenten 1,23 gefunden.

und durch Strahlung

$$Q_S = 4\pi\sigma R^2 (T^4 - T_0^4).$$

Für die Längeneinheit eines Cylinders in einem umgebenden Hohlcylinder betragen die entsprechenden Mengen

$$Q_L = \frac{2\pi\varkappa (T - T_0)}{\log \frac{R_0}{R}} \quad \text{und} \quad Q_S = 2\pi\sigma R (T^4 - T_0^4).$$

Bei abnehmendem Radius R verschwindet Q_S schneller als Q_L. Sehr kleine Körper in luftverdünnter Umgebung verlieren also ihre Wärme vornehmlich durch Leitung[101]), sehr grosse durch Strahlung. Als Zahlenwerte kann man annehmen: für σ nach den absoluten Messungen von *Kurlbaum*[102]) bei einer Oberfläche, deren Reflexionsvermögen r beträgt, $\sigma = (1 - r)\,1{,}28 \cdot 10^{-12} \frac{\text{gr. cal}}{\text{cm}^2\,\text{sec}}$ und für $\varkappa$ bei Luft von der Temperatur u^0 Cels. $\varkappa = 50 \cdot 10^{-6}(1 + 0{,}002\,u) \frac{\text{gr. cal}}{\text{cm sec} \times \text{Grad}}$.

22. Methode von Angström (1861)[103]). Die erste Methode, welche keinen stationären Zustand, sondern die zeitliche Änderung der Temperaturverteilung benutzt, rührt von *Angström* her. Ein langer Stab in einer Umgebung von der Temperatur 0 wird an einem Ende ($x = 0$) periodisch erwärmt und abgekühlt (Periodendauer T). Der Vorgang wird dargestellt durch das Integral der Gleichung (IX)

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{-\alpha_n x} \cos\left(\frac{2n\pi t}{T} - \beta_n x + \gamma_n\right), \tag{XI}$$

wo die α_n und β_n aus den Gleichungen

$$\alpha_n \beta_n = \frac{n\pi}{kT}; \quad \alpha_n^2 - \beta_n^2 = \frac{h}{k} \tag{XII}$$

zu berechnen und die A_n und γ_n von dem zeitlichen Ablauf der dem einen Ende zugeführten Erwärmung abhängen.

Für zwei Stellen (x und $x + l$) wird der Temperaturverlauf als Funktion der Zeit beobachtet und als Kosinusreihe mit der Periode T dargestellt:

---

101) Hiernach lässt sich erwarten, dass die von *Schleiermacher* u. a. benutzte Methode, die Wärmeleitung eines Gases aus der Temperatur und dem Energieverbrauch eines elektrisch erwärmten Drahtes zu finden, bei Anwendung sehr dünner Drähte bis zu relativ hohen Temperaturen brauchbar bleibt.

102) *F. Kurlbaum,* Ann. Phys. Chem. 65 (1898), p. 753.

103) *A. J. Angström,* Ann. Phys. Chem. 114 (1861), p. 513; 123 (1864), p. 628.

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi t}{T} + b_n\right),$$

$$u(x+l) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n' \cos\left(\frac{2n\pi t}{T} + b_n'\right).$$

Für die so gefundenen Koeffizienten a, b, a', b' gelten, da die Reihen in der Form (XI) enthalten sein müssen, die Gleichungen

$$\frac{a_n}{a_n'} = e^{\alpha_n l}; \quad b_n - b_n' = \beta_n l.$$

Sind hieraus für irgend ein n die Werte α_n und β_n gefunden, so erhält man aus (XII) die Grössen h und k.

Eine Abänderung der *Angström*'schen Methode in der Weise, dass beide Stabenden abwechselnd erwärmt und abgekühlt werden, hat *Fr. Neumann* in seinen Vorlesungen gegeben und *H. Weber*[104]) durchgeführt. Hier ist jedoch die nicht zutreffende Annahme gemacht, dass die Endflächen durch Wasserspülung plötzlich auf eine andere Temperatur gebracht werden (vgl. Nr. **18**), die bei *Angström* nicht zu Grunde gelegt ist.

Die Unabhängigkeit von unsicheren Voraussetzungen bildet einen wesentlichen Vorzug der *Angström*'schen Methode. Den Temperaturverlauf als Funktion der Zeit zu bestimmen ist mit Thermoelement, Spiegelgalvanometer und Chronograph, ev. photographisch, leicht und genau ausführbar. Bei der Berechnung können die harmonischen Analysatoren (s. II A 2, Nr. **60**) gute Dienste leisten.

23. Methoden von Fr. Neumann (1862)[105]). Gute Leiter untersucht *Neumann* in Stabform. Der Stab wird an Fäden aufgehängt, an einem Ende erwärmt und dann sich selbst überlassen. Durch die Endflächen findet ebenso wie durch die Seitenflächen Ausstrahlung statt. Darnach treten zu Differentialgleichung (IX) die Grenzbedingungen:

$$\text{für } x = 0 \text{ ist } \varkappa \frac{\partial u}{\partial x} = Hu,$$

$$\text{„ } x = l \text{ „ } \varkappa \frac{\partial u}{\partial x} = -Hu.$$

Ein Integral, welches diesen Bedingungen genügt und sich einem beliebigen Anfangszustande anpassen lässt, ist (s. Nr. 5g)

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\beta_n t}\left(\cos \lambda_n x + \frac{b}{\lambda_n} \sin \lambda_n x\right),$$

104) *H. Weber*, Ann. Phys. Chem. 146 (1872), p. 257.

105) *F. Neumann*, Ann. chim. phys. 66 (1862), p. 183; *Kirchhoff*, Vorl., p. 35.

wo

$$b = \frac{H}{\varkappa}; \quad \beta_n = k\lambda_n^2 + h \tag{XIII}$$

ist und die λ_n aus der Gleichung

$$\operatorname{tg} \lambda_n l = \frac{2\lambda_n b}{\lambda_n^2 - b^2} \tag{XIV}$$

berechnet werden. Dabei ist

$$0 < \lambda_1 l < \pi < \lambda_2 l < 2\pi \ldots .$$

Sind u_0 und u_l die Temperaturen in den beiden Endquerschnitten, so folgt

$$\frac{u_0 + u_l}{2} = A_1 e^{-\beta_1 t} + A_3 e^{-\beta_2 t} + \cdots,$$

$$\frac{u_0 - u_l}{2} = A_2 e^{-\beta_2 t} + A_4 e^{-\beta_4 t} + \cdots .$$

Die Reihen konvergieren so schnell, dass für nicht zu kleine Zeiten das erste Glied ausreicht. Nun werden u_0 und u_l als Funktion der Zeit beobachtet, β_1 und β_2 berechnet, woraus nach den Gleichungen (XIII), (XIV) und (VII) h und k durch eine Näherungsmethode gefunden werden können. Dabei lässt sich (XIV) ersetzen durch

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda_1 l}{2} = \frac{b}{\lambda_1} \quad \text{und} \quad \operatorname{tg} \frac{\lambda_2 l}{2} = -\frac{\lambda_2}{b}.$$

Die Rechnung gestaltet sich wesentlich einfacher, wenn die Temperatur ausser an den Enden auch in der Mitte des Stabes beobachtet wird.

Die Ausdehnung der vorstehenden Methode auf einen ringförmigen Körper ist gleichfalls von *Neumann* gegeben[106]) und von *H. F. Weber*[107]) unter Annahme linearer Abhängigkeit der Koeffizienten von der Temperatur durchgeführt.

Für schlechte Leiter benutzt *Neumann* Kugel- oder Würfelform[108]). Der Leiter wird mit konstanter oder nahe konstanter Anfangstemperatur in eine Umgebung von anderer Temperatur gebracht, mit welcher er gemäss der Grenzbedingung (V) Wärme austauscht. Ist der Leiter eine Kugel vom Radius c, so wird die Temperatur als Funktion der Zeit durch eine Reihe dargestellt (vgl. Nr. 8)

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k\lambda_n^2 t} \frac{\sin \lambda_n r}{r},$$

wo die λ_n Wurzeln der Gleichung

106) *G. Kirchhoff,* Vorl., p. 38.
107) *H. F. Weber,* Berl. Ber. 1880, p. 457.
108) Vgl. *H. Hecht,* Diss. Königsberg 1903.

$$\lambda c = \left(1 - \frac{Hc}{\varkappa}\right) \operatorname{tg} \lambda c$$

sind. Für nicht zu kleine Zeiten genügt das erste Glied

$$u = A_1 e^{-k\lambda_1^2 t} \frac{\sin \lambda_1 r}{r}.$$

Bei einem Würfel von der Kantenlänge l hat man (vgl. Nr. 7c) $u = \{\sum A_n e^{-k\lambda_n^2 t} \cos \lambda_n x\} \{\sum A_n e^{-k\lambda_n^2 t} \cos \lambda_n y\} \{\sum A_n e^{-k\lambda_n^2 t} \cos \lambda_n z\}$, wo die λ_n aus der Gleichung

$$\lambda \operatorname{tg} \frac{\lambda l}{2} = \frac{H}{\varkappa}$$

zu berechnen sind. Wiederum ist für nicht zu kleine Zeiten das erste Glied ausreichend

$$u = A_1^3 e^{-3k\lambda_1^2 t} \cos \lambda_1 x \cos \lambda_1 y \cos \lambda_1 z.$$

Beobachtet man die Temperatur an zwei Stellen und zu zwei Zeiten, so lässt sich A_1 und λ_1 eliminieren und k berechnen.

Die letzte *Neumann*'sche Methode erfordert ebenso wie die von *Despretz* eine sorgfältige experimentelle Definition der äusseren Wärmeleitung.

24. Methode von Kirchhoff und Hansemann (1879)[109]. Ausgangspunkt der Methode ist das folgende in Nr. 6a behandelte ideale Problem der Wärmeleitung: Ein unendlich ausgedehnter durch die Ebene $x = 0$ begrenzter Leiter von der Temperatur 0 erfährt eine Störung des Temperaturgleichgewichtes, indem in der Grenzebene plötzlich die Temperatur 1 erzeugt und erhalten wird. Diesem Problem entspricht die Lösung der Differentialgleichung (IV) (vgl. Nr. 5i)

$$u = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\infty} e^{-q^2} dq.$$

Lässt sich das Problem experimentell verwirklichen, so kann man die an irgend einer Stelle x zu den Zeiten t beobachteten Temperaturen u durch die obige Funktion darstellen, den Parameter $\frac{x}{2\sqrt{k}}$ entnehmen und daraus das Temperaturleitvermögen k berechnen[110].

109) *G. Kirchhoff* und *G. Hansemann*, Berl. Ber. 20. Nov. 1879 und 12. Mai 1881; Ann. Phys. Chem. 9 (1880), p. 1; 13 (1881), p. 406; *Kirchhoff*, Ges. Abh., p. 495 und Nachtrag, p. 1.

110) Wegen der Tabellen des Integrals $\int_q^\infty e^{-q^2} dq$ s. Anm. 46. Über die Art der Berechnung vgl. Nr. 26c.

Kirchhoff und *Hansemann* benutzten, um den Einfluss der äusseren Wärmeleitung herabzudrücken, als Versuchskörper einen Würfel von 14 cm Kantenlänge, der zu Anfang die gleich Null gesetzte Temperatur der Umgebung besass. Die eine Seite wurde der plötzlichen Temperaturänderung unterworfen, für die anderen Seiten gilt die Oberflächenbedingung (V). Die zugehörige Lösung der Differentialgleichung (IV) kann man sich als Reihe nach Potenzen von h entwickelt denken. *Kirchhoff* und *Hansemann* beschränkten sich auf die beiden ersten Glieder, setzten also

$$u = U_0 + h U_1 .$$

U_0 ist die Lösung ohne Rücksicht auf äussere Wärmeleitung und hängt nur von der einen Koordinate x ab. Man erhält U_0 durch eine Superposition von Lösungen des idealen Problems nach der Spiegelungsmethode (vgl. Nr. **6**)

$$U_0 = U\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) + U\left(\frac{2l-x}{2\sqrt{kt}}\right) - U\left(\frac{2l+x}{2\sqrt{kt}}\right) - U\left(\frac{4l-x}{2\sqrt{kt}}\right) + \cdots ,$$

wobei

$$U(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda$$

gesetzt ist. U_1 wird in Näherung durch ein System von Reihen dargestellt. Mittels der Ausdrücke für U_0 und U_1 wird ein beobachteter Temperaturverlauf $u = f(t)$ auf den Fall des idealen Problems reduziert und aus der Darstellung $f(t)_{\text{red}} = U\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right)$ der Koeffizient k berechnet.

Die vorausgesetzte Grenzbedingung einer plötzlichen Temperaturänderung der Grenzfläche suchten *Kirchhoff* und *Hansemann* durch Anspritzen mit Wasser zu verwirklichen, überzeugten sich aber, dass dies nicht gelang, und führten dann als Temperatur der Grenzfläche $C + \varphi(t)$ in die Rechnung ein, indem sie $\varphi(t)$ als klein gegen die Konstante C annahmen. Durch Hinzufügen einer Beobachtungsreihe in einem der Grenzfläche nahe gelegenen Punkte wurde $\varphi(t)$ eliminiert.

Im allgemeinen genügt freilich die Annahme, dass $\varphi(t)$ klein sei, dem wirklichen Vorgang an der Grenzfläche nicht (vgl. Nr. **18** und **21**).

25. Methode von L. Lorenz (1881)[111]. *Lorenz* gründete seine Methode nicht auf ein explicites Integral der Wärmeleitungsgleichung, sondern führte an dem untersuchten Stabe experimentell eine mecha-

111) *L. Lorenz*, Ann. Phys. Chem. 13 (1881), p. 422 u. 582.

nische Quadratur derselben aus, indem er eine grosse Anzahl von Thermoelementen verwandte. Das untersuchte Stück des Stabes werde in n Teile von der Länge l zerlegt gedacht; ferner werde die Gleichung (IX) mit dx multipliziert und an ihr die doppelte Integration $\int_0^{(n-1)l} dx \int_x^{x+l} dx$ ausgeführt. Benutzt man dabei, dass für eine beliebige Funktion $f(x)$

$$\int_0^{(n-1)l} dx \int_x^{x+l} f(x)\,dx = l^2\{f(l) + f(2l) + \cdots + f((n-1)l)\}$$
$$+ \tfrac{1}{12} l^2\{f(0) - f(l) - f((n-1)l) + f(nl)\} + \cdots,^{112})$$

oder auch

$$= l^2\{f(\tfrac{11}{12}l) + f(2l) + \cdots + f((n-2)l) + f((n-\tfrac{11}{12})l)\} + \cdots$$

ist, und setzt

$$\Sigma = u_{\frac{11}{12}l} + u_{2l} + \cdots + u_{(n-2)l} + u_{(n-\frac{11}{12})l},$$
$$\Delta = u_0 - u_l - u_{(n-1)l} + u_{nl},$$

wo u_a die Temperatur im Querschnitt $x = a$, so erhält man

$$l^2 \frac{d\Sigma}{dt} = k\Delta - hl^2\Sigma.$$

Σ und Δ sind durch geeignete Kombination von Thermoelementen direkt messbar. Nun führt man zwei verschiedene Vorgänge herbei, indem man zunächst die Stange von einem Ende aus erwärmt und dann mit der Erwärmung aufhört, sodass im ersten Teil Σ wächst und im zweiten die früheren Werte rückwärts durchläuft, während Δ nach Aufhören der Erwärmung bald in einen sehr kleinen Wert Δ' übergeht. Für den ersten Vorgang gilt die letzte Gleichung; für den zweiten folgt ebenso

$$l^2 \frac{d\Sigma'}{dt} = k\Delta' - hl^2\Sigma'$$

und durch Subtraktion für je zwei Werte $\Sigma = \Sigma'$

$$l^2\left(\frac{d\Sigma}{dt} - \frac{d\Sigma'}{dt}\right) = k(\Delta - \Delta'),$$

woraus k berechnet wird.

Lorenz bildete die Methode noch weiter aus, indem er die Abhängigkeit der Koeffizienten von der Temperatur berücksichtigte. Die Erwärmung des Stabes leitete er so, dass Δ während der Beobachtung konstant blieb.

112) Die Formel ergiebt sich, wenn $f(x)$ in jedem der Intervalle $(0, l)$ $(l, 2l) \cdots ((n-2))l$, $(n-1)l)$ mittels Differenzenreihen durch die in I D 3 (Art. *Bauschinger,* Interpolation) Gl. (5) gegebene Interpolationsformel dargestellt und die Integration ausgeführt wird.

26. Methoden aus dem Berliner physikalischen Institut (1898—1903). In dem von *Warburg* geleiteten physikalischen Institut der Berliner Universität sind in einer Reihe von Arbeiten[113]) zwei Methoden entwickelt, welche beide darauf beruhen, dass das ursprüngliche Temperaturgleichgewicht eines stabförmigen Leiters von einer Endfläche aus plötzlich gestört wird. Die erste Methode, welche von *Schulze* in Angriff genommen und von *Grüneisen* fortgeführt wurde, schliesst sich direkt an die von *Kirchhoff* und *Hansemann* an einem Würfel vorgenommenen Versuche an, indem die Temperaturänderung der Endfläche ebenso wie dort durch Wasserspülung bewirkt wurde. Bei der zweiten, von *Giebe* bei der Temperatur der flüssigen Luft durchgeführten Methode geschah diese Temperaturänderung nach dem Vorgange von *Grüneisen* durch Bestrahlung mit einem glühenden Platinblech.

Um von einer mangelhaften Definition der Temperaturstörung unabhängig zu werden, wurde bei diesen Methoden folgendes Verfahren eingeschlagen. Man beobachtete den Temperaturverlauf nicht nur, wie sonst genügen würde, in einem, sondern in zwei Querschnitten. Kennt man nun irgend ein Integral der Differentialgleichung (IX), welches beide Beobachtungen darstellt, so ist dies jedenfalls die richtige Lösung, aus der das Wärmeleitvermögen berechnet werden kann. Die eigentlichen Grenzbedingungen an der Endfläche $x = 0$ wurden nur dazu benutzt, eine geeignete mathematische Form für das Integral zu erhalten. Durch geeignete Wahl der verfügbaren Konstanten wurde dann diese schon angenähert richtige Lösung den Beobachtungen angepasst. Die Form des Integrals ist bei beiden Methoden entsprechend den Grenzbedingungen verschieden.

a. Bespülung der Endfläche mit einem Wasserstrahl.

Die in Wirklichkeit nicht ganz zutreffende Grenzbedingung, dass für $x = 0$ $u = C$ ist[114]), liefert zu (IX) das Integral

$$u = \frac{1}{2} C \left\{ e^{x\sqrt{\frac{h}{k}}} U\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}} + \sqrt{ht}\right) + e^{-x\sqrt{\frac{h}{k}}} U\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}} - \sqrt{ht}\right) \right\},$$

wo, wie früher,

113) *F. A. Schulze,* Ann. Phys. Chem. 66 (1898), p. 207; *F. Grüneisen,* Ann. Phys. 3 (1900), p. 43; *E. Giebe,* Diss. Berlin 1903, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 1903, p. 60.

114) Über die Ersetzung dieser Grenzbedingung durch eine andere vgl. Nr. **21.**

$$U(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\lambda}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda$$

gesetzt ist. Dies Integral lässt sich nach Potenzen von h entwickeln, was bei Beschränkung auf die erste Potenz ergiebt

$$u = C \cdot U\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right)\left[1 - \varphi\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) x^2 \frac{h}{k}\right], \tag{XV}$$

mit

$$\varphi(\lambda) = \frac{\frac{e^{-\lambda^2}}{2\lambda} - \int_{\lambda}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda}{2\int_{\lambda}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda}.$$

Die Lösung bleibt ein Integral der Differentialgleichung (IX), wenn zwei willkürliche Konstanten ξ und τ eingeführt werden, indem man x durch $x + \xi$ und t durch $t + \tau$ ersetzt. Diese beiden Konstanten hat man zur Verfügung, um die Formel den Beobachtungen anzupassen.

b. Bestrahlung der Endfläche mit einem glühenden Platinblech.

Sehr viel exakter, als sich die Grenzbedingung der vorigen Methode verwirklichen lässt, kann man bei Bestrahlung der Endfläche mit einem glühenden Platinblech den wirklichen Grenzvorgang mit der mathematischen Form in Übereinstimmung bringen, indem man annimmt, dass der Endfläche des Stabes durch die Bestrahlung eine zeitlich konstante Wärmemenge zugeführt wird. Darnach erhält man zu Gleichung (IX) die Grenzbedingungen

$$\text{für } t = 0 \text{ ist } \quad u = 0,$$

$$\text{für } x = 0 \text{ ist } \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -C$$

und dazu das Integral

$$u = \frac{C}{2\sqrt{\frac{h}{k}}} \left\{ e^{-x\sqrt{\frac{h}{k}}} U\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}} - \sqrt{ht}\right) - e^{x\sqrt{\frac{h}{k}}} U\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}} + \sqrt{ht}\right) \right\},$$

oder nach Potenzen von h entwickelt

$$u = Cx J\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right)\left[1 - \psi\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) x^2 \frac{h}{k}\right], \tag{XVI}$$

wo

$$J(\lambda) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{e^{-\lambda^2}}{2\lambda} - \int_{\lambda}^{\infty} e^{-\lambda^2} d\lambda \right\}$$

und

$$\psi(\lambda) = \frac{1}{6} \left(\frac{e^{-\lambda^2}}{2\lambda^3 \sqrt{\pi} J(\lambda)} \right) - 1 .$$

Wenn es erforderlich ist, kann ebenso wie bei der vorigen Methode durch Einführung zweier Konstanten ξ und τ die Lösung dem wirklichen Vorgange besser angepasst werden.

c. Berechnung der nach diesen Methoden angestellten Versuche.

Wenn der Temperaturverlauf in zwei Querschnitten x_1 und x_2 beobachtet und durch eine Hülfsmessung, etwa nach der *Despretz*'schen Methode, der Wert von $\frac{h}{k}$ gefunden ist, werden zunächst die beobachteten Temperaturen u nach den Formeln (XV) bezw. (XVI) durch Division mit dem in [ ] stehenden Faktor auf den idealen Fall ohne äussere Wärmeleitung reduziert, wozu Näherungswerte von k und ev. ξ und τ ausreichen. Die so erhaltenen verbesserten Temperaturen, die mit ϑ bezeichnet seien, müssen als Funktion der Zeit durch die Formel

(XVII) $$\vartheta(t) = C U \left(\frac{x + \xi}{2\sqrt{k(t + \tau)}} \right)$$

bezw.

(XVIII) $$\vartheta(t) = C(x + \xi) J \left(\frac{x + \xi}{2\sqrt{k(t + \tau)}} \right)$$

dargestellt werden, indem man τ und der Grösse

$$\gamma = \frac{x + \xi}{\sqrt{k}}$$

einen passenden Zahlenwert giebt. Aus zwei Wertepaaren (x_1, γ_1) und (x_2, γ_2) erhält man das Resultat

$$k = \left(\frac{x_2 - x_1}{\gamma_2 - \gamma_1} \right)^2 .$$

Das Auffinden des Parameters γ geschieht zweckmässig auf folgende Weise. Man zeichnet zunächst auf Koordinatenpapier die Kurve aus der bekannten mathematischen Funktion $\log U(z)$ bezw. $\log J(z)$ als Ordinate zu $\log \frac{1}{z^2}$ als Abscisse, welche zur Berechnung aller nach der Methode angestellten Versuche benutzt wird. Sodann trägt man aus den (wegen der äusseren Wärmeleitung reduzierten) Beobachtungen die Werte $\log \vartheta$ als Ordinate zu $\log (t + \tau)$ als Abscisse auf Paus-

papier in dasselbe Koordinatensystem ein, ev. für mehrere Werte τ, von denen der passendste ausgewählt wird. Durch Parallelverschieben des Pauspapiers müssen die beiden Kurven zur Deckung gebracht werden können, und die Verschiebung in Richtung der Abscissenaxe liefert den Wert $\log \frac{\gamma^2}{4}$. Nach den Formeln (XVII) und (XVIII) ist nämlich

$$z = \frac{x + \xi}{2\sqrt{k(t+\tau)}} = \frac{\gamma}{2\sqrt{t+\tau}},$$

also

$$\log \frac{1}{z^2} = \log (t + \tau) - \log \frac{\gamma^2}{4}.$$

27. Isothermen-Methode von Voigt (1897)[115]. Eine Wärmeströmung durchsetze die Grenzfläche zweier Körper mit dem Wärmeleitvermögen $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$. Die äussere Oberfläche sei normal zur Grenzfläche. Bedeuten dann φ_1 und φ_2 die Winkel zwischen den Isothermen auf der Oberfläche und der Grenzlinie, so folgt aus den Stetigkeitsbedingungen (VIII) für jede Art der Strömung, also unabhängig von der äusseren Wärmeleitung,

(XIX) $$\varkappa_1 : \varkappa_2 = \operatorname{tg} \varphi_1 : \operatorname{tg} \varphi_2 .$$

Kann man die Isothermen sichtbar machen[116], so liefert die Messung der Winkel φ das Verhältnis $\varkappa_1/\varkappa_2$. Bei logarithmischem Variieren folgt aus (XIX)

$$\frac{\delta(\varkappa_1/\varkappa_2)}{\varkappa_1/\varkappa_2} = \frac{2\delta\varphi_1}{\sin 2\varphi_1} - \frac{2\delta\varphi_2}{\sin 2\varphi_2}.$$

Darnach üben Messfehler den geringsten Einfluss, wenn die Winkel φ nahe an 45^0 gebracht sind.

28. Wärmeleitung in Krystallen, Allgemeines. Anstatt einer einzigen Konstanten, wie bei isotropen Körpern, ist in krystallinischen Medien die Grösse und Richtung der drei aufeinander senkrechten Hauptleitfähigkeiten zu bestimmen. Doch sind hiermit die Aufgaben der Messung noch nicht erschöpft. Die drei Hauptleitfähigkeiten genügen zwar zur Lösung aller die Temperaturverteilung betreffenden Probleme, aber die Richtung des Wärmeflusses bleibt unbekannt. In (Nr. 4) ist gezeigt, dass der den Wärmefluss darstellende Vektor im allgemeinen ausser einem von den Hauptleitfähigkeiten abhängenden

115) *W. Voigt,* Gött. Nachr. (1897), p. 184; Ann. Phys. Chem. 64 (1898), p. 95.

116) Mittel dazu sind die Schmelzkurven an Überzügen mit geeigneten Substanzen (Wachs-Terpentingemische, oder die bei 45^0 erstarrende Elaidinsäure), ferner thermoskopische Substanzen, die bei bestimmten Temperaturen einen Farbenwechsel zeigen (die Doppelsalze Jodsilber-Jodquecksilber bei 45^0, Jodkupfer-Jodquecksilber bei 70^0), endlich Behauchen und Bestreuen mit Lykopodium.

noch einen rotatorischen Bestandteil enthält, welcher beim Aufstellen der für die Temperaturverteilung geltenden Differentialgleichung fortfällt. Daher lässt sich die Frage nach der Existenz rotatorischer Wärmeströmungen durch Temperaturbeobachtung allein nicht entscheiden. Man muss ausserdem auf irgend einem anderen Wege über die Richtung der Wärmeströmung Kenntnis erlangen.

29. Methode von H. de Sénarmont (1847)[117]. Nachdem von *Duhamel* die Theorie der Wärmeleitung in Krystallen begründet war, wurde zum ersten Mal von *H. de Sénarmont* die Verschiedenheit der Leitfähigkeit in verschiedenen Richtungen experimentell gezeigt. Er erwärmte dünne Krystallplatten von der Mitte aus (z. B. mittels eines hindurchgesteckten Drahtes) und beobachtete an einer auf die Oberfläche gebrachten Wachsschicht die Schmelzkurve, welche eine Isotherme darstellt. Er bekam ellipsenförmige Kurven. Von *Duhamel* (1847) und *Stokes* (1851) wurde die Theorie der *Sénarmont*'schen Versuche entwickelt. Darnach sind bei sehr dünnen und grossen Krystallplatten die Isothermen in der That Ellipsen, deren Axen sich wie die Wurzeln aus den Leitfähigkeiten verhalten. Es lässt sich also nach der *Sénarmont*'schen Methode sowohl das Verhältnis als die Lage der drei Hauptleitfähigkeiten zwar nur mit geringer Genauigkeit, aber in einfacher und anschaulicher Weise bestimmen.

30. Methode von Voigt (1896)[118]. Die Messung des Verhältnisses der Hauptleitfähigkeiten und auch eine Untersuchung der rotatorischen Eigenschaften gestattet die von *W. Voigt* angegebene Methode, welche freilich eine thermische Symmetriebene am Krystall als bekannt voraussetzt. *Voigt* benutzt eine Wärmeströmung von bekannter Richtung. Um eine solche zu erhalten, stellt man nach ihm einen künstlichen Zwillingskrystall her, indem man eine rechteckige Platte durch einen parallel zu einer Kante geführten Schnitt halbiert, die eine Hälfte um 180° um die Normale zu jenem Schnitt dreht und die beiden Teile wieder zusammenkittet. Dann wird der Schnitt eine Symmetrieebene der Platte, sodass bei symmetrischer Anordnung die Wärmeströmung in der Nähe des Schnittes diesem parallel verlaufen muss. Auf der Platte werden Isothermen nach dem Schmelzkurvenverfahren hergestellt.

Es sei zunächst ein Krystall ohne rotatorische Eigenschaften vorausgesetzt. Das Koordinatensystem x, y, z falle mit den Haupt-

117) *H. de Sénarmont,* Par. C. R. 25 (1847), p. 459 u. 707; Ann. chim. phys. 21 (1847), p. 457 u. 32 (1848), p. 179; Ann. Phys. Chem. 73—75 (1848).

118) *W. Voigt,* Gött. Nachr. (1896), p. 236; Ann. Phys. Chem. 60 (1897), p. 350.

leitfähigkeitsaxen zusammen, die z-Axe sei normal zu der bekannten Symmetrieebene. Das Koordinatensystem ξ, η, ζ sei um den Winkel φ um die gemeinsame z-Axe gegen das vorige gedreht. Die Wärmeströmungskomponenten in der Symmetrieebene sind im ersten Koordinatensystem

$$\mathfrak{Q}_x = -\varkappa_1 \frac{\partial u}{\partial x}; \qquad \mathfrak{Q}_y = -\varkappa_2 \frac{\partial u}{\partial y}$$

und im zweiten

$$\mathfrak{Q}_\xi = -\varkappa_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \varkappa_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta}; \qquad \mathfrak{Q}_\eta = -\varkappa_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta} - \varkappa_{12} \frac{\partial u}{\partial \xi},$$

wo

$$\text{(XX)} \qquad \begin{cases} \varkappa_{11} = \varkappa_1 \cos^2 \varphi + \varkappa_2 \sin^2 \varphi \\ \varkappa_{22} = \varkappa_1 \sin^2 \varphi + \varkappa_2 \cos^2 \varphi \\ \varkappa_{12} = (\varkappa_2 - \varkappa_1) \sin \varphi \cos \varphi . \end{cases}$$

Wird nun eine Wärmeströmung erzeugt, die keine Komponente nach der ξ-Axe besitzt, so gilt

$$0 = -\varkappa_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \varkappa_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Dieser Strömung entspricht eine Isotherme, deren durch Messung zu findender Neigungswinkel α gegen die ξ-Axe die Tangente

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u}{\partial \xi} \Big/ \frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\varkappa_{12}}{\varkappa_{11}}$$

hat. Für eine Strömung ohne Komponente nach der η-Axe findet man an einer zweiten Platte ebenso

$$\operatorname{tg} \beta = -\frac{\varkappa_{12}}{\varkappa_{22}}$$

und aus beiden Gleichungen mittels (XX) das Verhältnis $\varkappa_1/\varkappa_2$ und den Winkel φ.

Für die Gültigkeit der obigen Formeln ist es einerlei, ob an dem Zustandekommen der benutzten Wärmeströmung äussere Wärmeleitung oder das Schmelzen des Überzuges beteiligt ist oder nicht.

Was das Erkennen etwaiger rotatorischer Qualitäten betrifft, so sei hier nur folgendes bemerkt. Sind keine solchen vorhanden, so wird, falls man $\varphi = 0$ macht, auch $\alpha = 0$, während bei Existenz rotatorischer Eigenschaften an der Schnittlinie ein Knick im Verlauf der Isotherme vorhanden sein muss. Die Versuche zur Auffindung (*Soret* und *Voigt*[119]) haben bisher stets ein negatives Resultat gehabt.

31. Messungsergebnisse. Um mit Hilfe der hier entwickelten formalen Theorie ein anschauliches Bild von den in der Natur vorkommenden Wärmeleitungsvorgängen zu gewinnen, ist es erforderlich,

119) *W. Voigt*, Gött. Nachr. (1903), p. 87.

die absolute Grösse der in den Gleichungen auftretenden, jedem Stoff eigentümlichen Konstanten $\varkappa$ und k zu kennen. Einige Werte sollen hier zusammengestellt werden[120]).

Die Einheit des Wärmeleitvermögens $\varkappa$ lässt sich nicht in das C. G. S.-System einordnen, weil ihre Definition (vgl. I) die ausserhalb des Systems stehende Temperatur enthält. Gebräuchlich ist es, die Temperatur nach Graden der *Celsius*skala zu rechnen und ausserdem als Einheit der Wärmemenge die Wasser-Grammkalorie (vgl. Art. 3, Nr. 2) zu benutzen. Dann erhält die Einheit von $\varkappa$ die Form $\left[\frac{\text{gr cal}}{\text{cm sec} \times \text{Grad}}\right]$. Wird die Wärmemenge in absoluten Arbeitseinheiten (Erg.) gemessen, so lautet die Einheit $\left[\frac{\text{cm gr}}{\text{sec}^3 \text{Grad}}\right]$. Der Zahlenwert von $\varkappa$ wird dabei $4{,}18 \cdot 10^7$ mal grösser. Die Einheit des Temperaturleitvermögens ist im C. G. S.-System enthalten und lautet $\left[\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}\right]$.

Wärmeleitvermögen und Temperaturleitvermögen einiger Substanzen bei Zimmertemperatur.

Substanz	Bemerkungen	Wärmeleitvermögen $\varkappa$	Temperaturleitvermögen k
		$\left[\frac{\text{gr cal}}{\text{cm sec Grad}}\right]$	$\left[\frac{\text{cm}^2}{\text{sec}}\right]$
Silber	rein	1,00	1,74
Kupfer	„	0,92	1,14
Gold	„	0,70	1,17
„	mit 0,2 Proc. Fe u. Cu	0,43	0,71
Zink	rein	0,26	0,40
Cadmium	„	0,22	0,47
Platin	„	0,166	0,24
Eisen	technische Sorten	0,14 bis 0,17	0,16 bis 0,20
Stahl	„	0,06 bis 0,12	0,06 bis 0,13
Zinn	rein	0,145	0,38
Blei	„	0,083	0,24
Wismut	„	0,018	0,07
Marmor	weiss	0,005	0,009
Glas	verschiedene Sorten	0,0015 bis 0,0025	0,003 bis 0,005
Schwefel		0,0006	0,0017
Wasser		0,0013	0,0013
Öl	verschiedene Sorten	0,0003 bis 0,0004	0,0007 bis 0,0010
Wasserstoff		0,00032	
Luft		0,00005	

120) Ausführliche Angaben finden sich in den Handbüchern der Experimentalphysik und in den „Physikalisch-Chemischen Tabellen“ von Landolt und Börnstein.

Über die Beziehung der Wärmeleitfähigkeit von Metallen zur elektrischen Leitfähigkeit sind einige Näherungsgesetze bekannt. *Wiedemann* und *Franz*[121]) fanden das erste derartige Gesetz, welches besagt, dass beide Leitvermögen bei verschiedenen Metallen proportional sind. Das zweite Gesetz wurde von *L. Lorenz*[122]) gefunden und ergänzt jenes dahin, dass die Proportionalitätskonstante der absoluten Temperatur proportional ist (vgl. in diesem Bande Art. *Diesselhorst*, Beziehungen der elektrischen Strömung zu Wärme und Magnetismus). Für reine Metalle (mit Ausnahme von Wismut) gelten beide Gesetze ziemlich nahe. Bei allen Ausnahmen, insbesondere Legierungen ist stets das Verhältnis des Wärmeleitvermögens zum elektrischen Leitvermögen grösser, als bei den reinen Metallen.

Ferner scheinen die Sätze, welche *Matthiessen*[123]) für die elektrische Leitfähigkeit von Legierungen aufgestellt hat, auch für die Wärmeleitfähigkeit zu gelten[124]). Hiernach würden Legierungen, welche nur die Metalle „Zink, Zinn, Blei, Cadmium“ enthalten, die Wärme im Verhältnis der Volumina leiten, alle anderen Legierungen schlechter als diesem Verhältnis entspricht. Wie stark der Einfluss selbst sehr geringer Beimengungen sein kann, zeigen die Zahlen für das reine und unreine Gold in der Tabelle.

Eine Abhängigkeit des Wärmeleitvermögens von der Temperatur (zwischen 0^0 und 100^0) ist bei den reinen Metallen mit Ausnahme des Wismuts, das bei steigender Temperatur schlechter leitend wird, kaum merklich. Die Leitfähigkeit der Legierungen nimmt mit der Temperatur zu. Das unreine Gold der Tabelle ändert sein Leitvermögen pro Grad um 0,0012, das reine um 0,0000 des Betrages. Bei anderen Legierungen sind Temperaturkoeffizienten bis etwa 0,003 gefunden.

121) *G. Wiedemann* und *R. Franz*, Ann. Phys. Chem. 89 (1853), p. 530.
122) *L. Lorentz*, Ann. Phys. Chem. 13 (1881), p. 599.
123) *A. Matthiessen*, Ann. Phys. Chem. 110 (1860), p. 190.
124) *F. A. Schulze*, Ann. Phys. 9 (1902), p. 555.

(Abgeschlossen im März 1904.)

V 5. TECHNISCHE THERMODYNAMIK.

Von

M. SCHRÖTER UND **L. PRANDTL**

IN MÜNCHEN. IN GÖTTINGEN.

Inhaltsübersicht.

a) Technische Thermodynamik im engeren Sinne. Von **M. Schröter.**

I. Die Grundlagen der technischen Thermodynamik.

1. Historische Übersicht.
2. Die allgemeinen Gleichungen der Thermodynamik.
3. Graphische Darstellungen.
4. Vollkommene Gase.
5. Zustandsänderungen der Gase.
6. Gesättigte Dämpfe.
7. Überhitzte Dämpfe.

II. Kreisprozesse der thermodynamischen Maschinen.

8. Allgemeines über die technischen Kreisprozesse.
9. Die Wärmekraftmaschinen und ihr Wirkungsgrad.
10. Die Dampfmaschine im besonderen.
11. Verbundmaschine, Anwendung von überhitztem Dampf.
12. Der Wirkungsgrad der Dampfmaschine.
13. Die Verbrennungsmotoren (Gasmaschine, Dieselmotor).
14. Kältemaschinen.

b) Strömende Bewegung der Gase und Dämpfe. Von **L. Prandtl.**

15. Abgrenzung des Stoffes.
16. Allgemeine Theorie der stationären Strömungen.
17. Bewegung ohne Widerstände und Wärmemitteilung.
18. Ausströmung aus Öffnungen und Mundstücken.
19. Strömungswiderstände in Röhren.
20. Strömung durch Röhren und Düsen.
21. Stationäre Wellen in einem freien Gasstrahl.
22. Überströmen.
23. Dampfturbinen.

Litteraturübersicht.

(Ohne Anspruch auf Vollständigkeit.) Diejenigen Schriften, in denen auch auf die Abteilung b) Bezügliches enthalten ist, sind durch einen * gekennzeichnet.

1) **Lehrbücher.**

J. W. Macquorn Rankine, Manual of the Steam Engine and other Prime Movers. 1. Aufl. 1859, 2. Aufl. London 1861, 4. Aufl. 1869, 9. Aufl. 1878 u. s. f.

G. Zeuner, Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie, 1. Aufl. Freiberg 1860, *2. Aufl. (völlig umgearbeitet) Leipzig 1866.

*— Technische Thermodynamik, 2 Bde., Leipzig, 1. Aufl. 1881, 1890, 2. Aufl. 1900, 1901 (zugleich 3. u. 4. Auflage der „Grundzüge").

G. Hirn, Exposition analytique et expérimentale de la théorie mécanique de la chaleur, 1. Aufl. 1862, 2. Aufl. 1863, 3. Aufl. 1875.

**F. Grashof,* Theoretische Maschinenlehre 1, Leipzig, Voss, 1875.

A. Witz, Thermodynamique à l'usage des Ingénieurs, Paris 1892.

J. Boulvin, Cours de mécanique appliquée, 3ième fascicule: Moteurs thermiques, Paris, Bernard, 1893.

J. A. Ewing, The steame engine and other heat-engines, Cambridge 1. Aufl. 1894.

Cotterill, The Steam Engine considered as a thermodynamic Machine, London 1896, 3rd edition.

V. Wood, Thermodynamics. Heat motors and Refrigerating machines, New-York 1900, 8. Aufl.

A. Musil, Grundlagen der Theorie und des Baues der Wärmekraftmaschinen (erweiterte Übersetzung von *Ewing*, steam-engine), Leipzig 1902.

**H. Lorenz,* Technische Wärmelehre, 2. Bd. der „Technischen Physik"), München, Oldenbourg, 1904.

J. J. Weyrauch, Grundriss der Wärmetheorie, Stuttgart 1904.

2) Fachzeitschriften.

Arbeiten aus dem Gebiet der technischen Thermodynamik finden sich in allen Jahrgängen der bedeutenderen deutschen und ausländischen technischen Zeitschriften; es seien nur genannt:

Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure (Berlin).
Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens (Berlin).
Der Civilingenieur (erscheint nicht mehr) (Leipzig).
Dingler's Polytechnisches Journal (Berlin).
Zeitschrift für die gesamte Kälteindustrie (München).
Zeitschrift für komprimierte Gase (Berlin).
Engineering (London).
The Engineer (London).
Bulletin d'Encouragement de l'industrie nationale (Paris).
Bulletin de la société industrielle de Mulhouse (Mülhausen i/Elsass)
Revue de Mécanique (Paris).

3) Monographieen.

a) Von historischem Interesse.

S. Carnot, Réflexions sur la puissance motrice du feu, Paris, Gauthier-Villars, 1878. (Wiederabdruck der 1824 erschienen Originalarbeit); deutsch in Ostwald's Klassikern.

E. Clapeyron, Sur la puissance motrice de la chaleur, Journal de l'école polytechnique, Paris 1834; deutsch 1843 in Poggendorff's Annalen Bd. 59. In neuerer Zeit wieder herausgegeben von *Mewes,* Berlin 1893 unter dem Titel: Über die bewegende Kraft der Wärme.

**G. Zeuner,* Das Lokomotivblasrohr, Zürich 1863.

J. W. Macquorn Rankine, Miscellaneons Scientific Papers, London, Griffin, 1878,

eine höchst wertvolle Sammlung der zerstreut erschienenen Originalabhandlungen *Rankine*'s, herausgegeben von *Tait* und *Millar*.

C. v. Linde, Theorie der Kälteerzeugungsmaschinen, Verhandl. d. Vereins z. Beförderung d. Gewerbfleisses 1875 und 1876.

b) Neuere Arbeiten.

E. G. Kirsch, Bewegung der Wärme in den Cylinderwandungen der Dampfmaschinen, Leipzig 1886.

A. Witz, Traité théorique et pratique des moteurs à gaz e à pétrole, 3. Aufl., Paris 1892—95.

R. Mollier, Das Wärmediagramm, Berlin, Simion, 1893.

R. Diesel, Theorie und Konstruktion eines rationellen Wärmemotors, Berlin, *Springer,* 1893.

A. Slaby, Calorimetrische Untersuchungen über den Kreisprozess der Gasmaschine, Berlin 1894.

J. Boulvin, Le diagramme entropique et ses applications, Paris, Dunod, 1897.

C. v. Linde, Artikel „Kälteerzeugung" in *Lueger*'s Lexikon der gesamten Technik, Stuttgart 1895—99.

E. Hausbrand, Verdampfen, Kondensieren und Kühlen, Berlin 1899.

A. Witz, Les progrès de la théorie des machines thermiques, Rapports Congrès intern. de Physique, Paris 1900, tome 3, p. 296.

H. Lorenz, Neuere Kühlmaschinen, 3. Aufl. München, Oldenbourg, 1901.

R. Schöttler, Die Gasmaschine, 4. Aufl. Braunschweig, Göritz, 1902.

**A. Stodola,* Die Dampfturbinen, Berlin, Springer, 1. Aufl. 1903, 3. Aufl. 1905.

R. Mollier, Kapitel „Wärmelehre" in dem Taschenbuch des Ingenieurs, herausgegeben vom Verein Hütte, 19. Aufl. 1904.

**R. Pröll,* Artikel „Dampfturbinen" in *Lueger*'s Lexikon der gesamten Technik, Stuttgart 1905.

---

a) Technische Thermodynamik im engeren Sinne. Von M. Schröter.

Vorbemerkung. Die technische Thermodynamik, wie sie *hier* verstanden wird, umfasst die Anwendung der Sätze und Methoden der allgemeinen Thermodynamik auf technische Prozesse mit ausdrücklicher Ausschliessung des Gebietes der Thermochemie, aber einschliesslich der Verbrennungsmotoren. Die stetige Entwicklung der Technik bringt es mit sich, dass von einer festen Abgrenzung der technischen Thermodynamik nicht die Rede sein kann; es war deshalb geboten, im folgenden eine *Auswahl* zu treffen unter besonderer Berücksichtigung der für die Encyklopädie in ihren angewandten Teilen geltenden Grundsätze sowie des verfügbaren Raumes. Die dem Techniker unentbehrliche graphische Darstellung ist als für den Mathematiker besonders instruktiv ausführlich behandelt, da sie ausser der damit erreichten Anschaulichkeit und Durchsichtigkeit des Verfahrens in den meisten Fällen dem Genauigkeitsbedürfniss der Praxis vollständig genügt.

Die Bezeichnungsweise der technischen Thermodynamik ist leider

so wenig wie die der allgemeinen Wärmetheorie bis heute eine einheitliche, so dringend dies auch zu wünschen wäre; im Interesse der Leser der Encyklopädie ist im folgenden möglichst enger Anschluss an die im Artikel V 3 (*Bryan*) benutzte Bezeichnungsweise gesucht, wie aus der folgenden Übersicht hervorgeht. Bezüglich der Masseinheiten sei im allgemeinen bemerkt, dass in der ganzen Technik (wie auch in den folgenden Ausführungen) das Kilogramm als Kraft- (oder Gewichts-) Einheit, nicht als Masseneinheit angesehen wird. Unter „spezifischem Volumen", „spezifischer Wärme" sind hier das Volumen der Gewichtseinheit, bezw. die der Gewichtseinheit zuzuführende Wärme verstanden. Da man aber denselben Körper (1 Liter Wasser) zur Definition der Krafteinheit im technischen und der Masseneinheit im physikalischen System benutzt, so hat dieser Unterschied der Masseinheiten keinen Einfluss auf die Zahlenwerte (wenn man von der kleinen Veränderlichkeit von g mit der Breite absieht und beim Übergang von kg zum gr den Faktor $^1/_{1000}$ hinzufügt). Ferner sei bemerkt, dass Wärmemengen hier nicht wie in Artikel 3 in Arbeitseinheiten, sondern in der Wärmeeinheit (W. E.) der grossen Kalorie gemessen werden, so dass in vielen Formeln jenes Artikels jetzt der Faktor A (reziproker Wert des Wärmeäquivalentes) beizufügen ist.

Die Gleichungen jenes Artikels werden im folgenden in [ ] zitiert werden, während wir auf die Gleichungen des vorliegenden Artikels durch ( ) hinweisen.

Bezeichnungen.

a) Allgemeine.

Benennung	Zeichen: im folgenden verwendet	Zeichen: in der Technik gebräuchlich	Masseinheiten	Formeln	Gleichwertige Benennungen
Volumen	V	V	cbm	—	
Gewicht des Arbeitsstoffes	G	G	kg		
Spezifisches Volumen	v	v	cbm/kg	$v = \frac{V}{G}$	Volumen der Gewichtseinheit
Spezifischer Druck .	p	p	kg/qcm neue (techn.) Atmosphäre		Spannung, Kraft pro Flächeneinheit
Temperatur	t	t	° Celsius		
Absolute Temperatur	T	T	° Celsius	$T = 273 + t$	
Von aussen zugeführte Wärmemenge	Q	Q	kg-Kalorie = W. E.		

Benennung	Zeichen im folgenden verwendet	Zeichen in der Technik gebräuchlich	Masseinheiten	Formeln	Gleichwertige Benennungen
Dasselbe pro Gewichtseinheit . . .	q	Q	kg-Kalorie = W. E.		
Gesamte innere Arbeit	U	—	„		Innere Energie, Energie
Innere Arbeit für die Gewichtseinheit . .	u	U	W. E./kg	$u = \frac{U}{G}$	
Äussere Arbeit . .	W	L	m kg		Arbeit der äusseren Kräfte
Äussere Arbeit für die Gewichtseinheit	w		m		
Mechanisches Wärmeäquivalent . . .	$1/A$	$1/A$	W. E./m kg	$A = \frac{1}{428}$	
Entropie	S	P	Entropieeinheiten	$S = \int \frac{dQ}{T}$	Wärmegewicht
„ für die Gewichtseinheit . . .	s	—	Ent.-Einh./kg	$s = \frac{S}{G}$	
Erzeugungswärme bei konst. Druck .	J	—	W. E.		Gesamtwärme; Thermodynamisches Potential bei gegeb. Entropie und Druck ($\mathfrak{F}_s$ in Artikel 3, ζ nach *J. W. Gibbs*)
Spezifische Erzeugungswärme bei konst. Druck . . .	i	—	W. E./kg	$i = \frac{J}{G}$	
Spezifische Wärme bei einer beliebigen Zustandsänderung.	γ	c	„	$\gamma = \frac{dq}{dT}$	
Spezifische Wärme bei konst. Volumen	γ_v	c_v	„	$\gamma_v = \left(\frac{dq}{dT}\right)_v$	
Spezifische Wärme bei konst. Druck .	γ_p	c_p	„	$\gamma_p = \left(\frac{dq}{dT}\right)_p$	
Verhältnis der spezifischen Wärmen	$\varkappa$	k	unbenannt	$\varkappa = \frac{\gamma_p}{\gamma_v}$	
Gaskonstante für die Gewichtseinheit . .	B	B, R		$pv = BT$	
Absolute Gaskonstante (für das Kilogramm-Molekül μ)	R	—		$pv\mu = RT$	

b) Für gesättigte Dämpfe.

Spezifisches Volumen der Flüssigkeit beim Druck p	v''	σ	cbm/kg		

Benennung	Zeichen im folgenden verwendet	Zeichen in der Technik gebräuchlich	Masseinheiten	Formeln	Gleichwertige Benennungen
Spezifisches Volumen des trocken gesättigten Dampfes beim Druck p.	v'	s	cbm/kg		
Volumzunahme von 1 kg bei der Verdampfung	$v' - v''$	u	cbm/kg		
Flüssigkeitswärme pro 1 kg bei konstantem Druck . .	q_p	q	W. E./kg	$q_p = \int_0^t \gamma_p dt$	Wärmemenge zur Erhöhung der Temperatur von 1 kg Flüssigkeit unter dem konst. Druck p v. 0^0 auf die Sättigungstemperatur t^0
Aussere Verdampfungswärme pro 1 kg.	$Ap(v'-v'')$	Apu	W. E./kg		
Innere Verdampfungswärme pro 1 kg.	λ_i	ϱ	W. E./kg		
Latente Wärme der Verdampfung pro 1 kg bei konst. Druck	λ	r	W. E./kg	$\lambda = \lambda_i + Ap(v'-v'')$	Verdampfungswärme beim Druck p zur Verwandlung von 1 kg Flüssigkeit von t^0 in gesättigten Dampf von t^0
Spezifische Wärme der Flüssigkeit . .	γ''	c	W. E./kg		
Spezifische Wärme des Dampfes . . .	γ'	h	W. E./kg		
Entropie der Flüssigkeit pro 1 kg .	s''	τ	Entropieeinheiten	$s'' = \int_0^t \frac{dq}{T}$	
Entropie des gesättigten Dampfes pro 1 kg.	s'	$\tau + \frac{r}{T}$	Entropieeinheiten	$s' = s'' + \frac{\lambda}{T}$	Verhältnis des in 1 kg Mischung von Dampf und Flüssigkeit enthaltenen Dampfgewichts zum Totalgewicht
Spezifische Dampfmenge	x		unbenannt	. . . . .	

I. Die Grundlagen der technischen Thermodynamik.

1. Historische Übersicht. Die technische Thermodynamik umfasst die Anwendung der Sätze der allgemeinen Thermodynamik auf technische Probleme; während es für die Darstellung ganz gerechtfertigt ist, die allgemeine Wärmelehre vorauszuschicken und die technische Wärmelehre nachfolgen zu lassen, ist die geschichtliche Entwicklung nicht etwa in der Weise vor sich gegangen, dass der abgeschlossenen Arbeit der theoretischen Forscher die Anwendung auf technische Probleme seitens der praktischen Ingenieure nachgefolgt wäre. Vielfach hat das Umgekehrte stattgefunden, indem die Praxis in der Ausführung thermodynamischer Arbeitsprozesse durch Maschinen um ein beträchtliches der wissenschaftlichen Forschung vorausgeeilt ist, und es kann an vielen Stellen nachgewiesen werden, dass mindestens ebensoviele wissenschaftliche Ergebnisse der Anregung von seiten der Praxis zu verdanken sind als umgekehrt.

Jedenfalls ist die Geschichte der technischen Thermodynamik streng genommen ganz unzertrennlich von der Geschichte der thermodynamischen Technik und es kann daher die Aufgabe der folgenden Skizze nur die sein, einige Hauptpunkte und Richtungslinien der Entwicklung der technischen Thermodynamik an Hand der Arbeiten ihrer hervorragendsten Förderer herauszuheben.

Als erster derselben hat *James Watt* zu gelten, dessen hauptsächlicher Beitrag zur technischen Thermodynamik — die Erforschung des Verdampfungsprozesses durch Bestimmung der Verdampfungswärme bei verschiedenen Pressungen — ein typisches Beispiel dafür ist, wie durch praktisch-technische Probleme der Anstoss zur Beantwortung wissenschaftlicher Fragen gegeben wird. Im Anfang reichte die geistige Kraft eines einzelnen zur Lösung aus, später trat naturgemäss eine Differenzierung ein und schon die beiden nächsten Marksteine auf dem Weg der technischen Thermodynamik rühren von Männern her, welche nicht in erster Linie ausübende Ingenieure waren; es sind dies *Carnot*'s „Réflexions sur la puissance motrice du feu“ (1824) und *Clapeyron*'s Abhandlung „Sur la puissance motrice de la chaleur“ (1834) — beides grundlegende Werke, das erstere durch die der Zeit vorauseilende Darlegung des inneren Wesens der Wärmekraftmaschinen (freilich noch ohne den ersten Hauptsatz) und durch die Klarstellung der Bedingungen für beste ökonomische Wirkung; das letztere durch seine mathematisch-graphische Formulierung der Grundbegriffe, die für alle späteren Behandlungsweisen des Gegenstandes massgebend geblieben ist.

Beide Werke wurden vollständig ignoriert und vergessen; sie waren dem Bedürfnis und Verständnis ihrer Zeit weit vorangeeilt und mussten Jahrzehnte später wieder neu entdeckt werden. Zunächst war die von *Watt* mit unzulänglichen Hilfsmitteln begonnene Arbeit fortzusetzen, die Natur musste befragt werden, um eine sichere Grundlage für die Theorie zu gewinnen — diese klaffende Lücke ausgefüllt und damit die Befruchtung der thermodynamischen Technik durch die Wissenschaft ermöglicht zu haben, ist das Verdienst *Regnault*'s, der im Jahr 1847 den ersten Band seiner „Relations des expériences etc." erscheinen liess, dem 1862 der zweite und 1870 der dritte folgte; dass diese unschätzbaren Experimentaluntersuchungen auf Veranlassung und auf Kosten der französischen Regierung unternommen wurden, bildet für alle Zeiten einen Ruhmestitel derselben.

Fast gleichzeitig traten nach der Veröffentlichung des ersten Bandes der „Relations" in England, Deutschland und Frankreich die Männer auf, welche man als Begründer der technischen Thermodynamik von heute mit Recht feiert: der Schotte *J. W. Macquorn Rankine* (1820—72), Professor für Mechanik und Ingenieurwissenschaft an der Universität Glasgow; *Gustav Zeuner* (geb. 1828 zu Döbeln in Sachsen), damals Professor für theoretische Maschinenlehre am Eidgenössischen Polytechnikum in Zürich und der Elsässer *Gustave Adolphe Hirn* (1815—89), Fabrikbesitzer in Logelbach im Elsass, welchen trotz seines deutschen Namens die Franzosen als den ihrigen betrachten dürfen.

1859 erschien nach vielen vorausgegangenen technisch-thermodynamischen Abhandlungen die erste Auflage von *Rankine*'s „Manual of the Steam Engine and other Prime Movers", in dessen Vorrede der Verfasser mit berechtigtem Selbstgefühl sagen durfte:

„The principles of thermodynamics or the Science of the mechanical action of heat are explained in the third chapter of the third part more fully than would have been necessary but for the fact, that this is the first systematic treatise on that science, which has ever appeared, the only previous sources of information regarding it being detached memoirs in the transactions of learned Societies and in scientific journals." 1860 trat *Zeuner* mit den „Grundzügen der mechanischen Wärmetheorie" an die Öffentlichkeit und 1862 erschien die erste Auflage von *Hirn*'s „Exposition analytique et expérimentale de la théorie mécanique de la chaleur".

Ohne an dieser Stelle in Einzelheiten eintreten zu können, mag nur zu kurzer Charakteristik angeführt werden, dass *Rankine*'s Arbeiten auf thermodynamischem Gebiet sich durch eine überquellende Fülle

originaler Gedanken auszeichnen, die in der knappsten und manchmal schwer verständlicher Sprache zusammengedrängt sind; er geht ohne grossen mathematischen Apparat, aber vielfach eigenartige graphische Darstellungen benützend, auf sein Ziel los, eine auf den ersten und zweiten Hauptsatz aufgebaute rationelle Theorie der Wärmekraftmaschinen zu geben, zu deren praktischer Anwendung er die *Regnault*schen Versuchswerte zu Tabellen verarbeitet. *Zeuner* entwickelt in eleganter, mathematisch ausgefeilter Form die beiden Hauptsätze und geht dann besonders auf die Eigenschaften des Wasserdampfes ein; seine auf *Regnault*'s Versuchen beruhenden, praktisch angeordneten Dampftabellen sind heute jedem Maschineningenieur geläufig. In der ersten Auflage verfolgt *Zeuner* vor allem den Zweck, den Technikern eine neue Wissenschaft zu vermitteln, wobei gleichfalls eine Menge originaler Darstellungsweisen in Formeln und Diagrammen das Verständnis wesentlich erleichtern. Im Gegensatz zu beiden und gleichzeitig beide ergänzend beruht *Hirn*'s Werk hauptsächlich auf experimenteller Grundlage; *Hirn* ist ein Meister des technisch-wissenschaftlichen Versuches nicht nur in Bezug auf Durchführung, sondern auch in der Diskussion und Kritik. Dass heute die technische Thermodynamik wesentlich experimenteller Natur geworden ist, ist vornehmlich auf die Anregung zurückzuführen, welche *Hirn* durch seine von der sogenannten „elsässischen Schule“[1]) weiter geführten Studien auf dem Gebiet der von ihm sogenannten „praktischen Theorie“ der Dampfmaschine gegeben hat.

Neben jene grundlegenden Werke, von welchen in erster Linie das *Zeuner*'sche Buch in seinen späteren Auflagen durch fortwährende Erweiterung den so ausserordentlich vervielfältigten Fortschritten der Technik gerecht wird, stellt sich die Bearbeitung der Wärmetheorie im ersten Band (1875) des *Grashof*'schen gross angelegten Werkes „Theoretische Maschinenlehre“ als eine Zusammenfassung des damaligen gesicherten Bestandes der Thermodynamik in ihrer Anwendung auf das Verhalten von Gasen und Dämpfen, während erst im dritten Band desselben Werkes (1890) die Wärmekraftmaschinen behandelt werden. *Grashof* geb. 1826 in Düsseldorf, gest. 1893 in Karlsruhe. Abgesehen von originalen Beiträgen liegt die Besonderheit des *Grashof*'schen Werkes in der durchdringenden Schärfe der Kritik, mit welcher die Genauigkeitsgrenzen und die Zulässigkeit der Annahmen diskutiert werden und der Kern eines Problems blosgelegt wird; weder

1) Vgl. die Gedächtnisrede von *A. Slaby* auf Hirn, Verh. des Ver. z. Beförderung des Gewerbfleisses 69 (1890), p. 236 = Calorimetr. Untersuchungen, p. 235.

die englische noch die französische Litteratur der neueren Zeit haben dem *Grashof*'schen Werke ein gleich umfassendes an die Seite zu stellen.

Aus der gleichen Zeit (1875) stammt die Abhandlung von *C. Linde* „Theorie der Kälteerzeugung" in den Verhandlungen des Vereins zur Beförderung des Gewerbfleisses in Preussen; die von dem Verfasser für den günstigsten Arbeitsprozess der Kompressions-Kältemaschinen aus der Umkehrung des *Carnot*'schen Prozesses der Dampfmaschine abgeleiteten Grundsätze werden durch den vollkommenen Erfolg der danach konstruierten Ammoniak-Kompressionsmaschine bestätigt; auf keinem Gebiet der praktischen Anwendung ist der Einfluss der theoretischen Thermodynamik so unmittelbar nachgewiesen wie bei der Kältetechnik.

Die Entwicklung der technischen Thermodynamik war durch die oben genannten klassischen Werke ihrer Begründer vorgezeichnet und so begann etwa seit 1875 eine emsige Einzelarbeit auf ihren verschiedenen Gebieten, hauptsächlich in experimenteller Richtung, welche auch heute noch nicht als abgeschlossen gelten kann, wenn schon in den letzten Jahren wieder versucht wird, das grosse Material zusammenfassend zu verarbeiten wie in der „Technischen Wärmelehre" von *H. Lorenz* und dem „Grundriss der Wärmelehre" von *Weyrauch*. Natürlich beteiligen sich alle Kulturnationen an dieser Arbeit; hier können nur die allgemeinen Arbeitsrichtungen angedeutet werden; Einzelheiten würden zu weit führen.

Die schon von *Rankine* und *Clausius*, namentlich aber von *Zeuner* besonders klar formulierten Forderungen für den Idealprozess der Dampfmaschine liessen die Grenzen, welche der zweite Hauptsatz ihrer Ökonomie steckt, erkennen — es galt nun, innerhalb derselben wenigstens nach Möglichkeit den störenden Einflüssen zu begegnen; den Weg dazu hatte *Hirn* gebahnt, indem er die Wirkung der Cylinderwandungen nachwies und durch die Überhitzung des Dampfes zu bekämpfen suchte. Damit war ein freilich wieder lange Zeit unbeachtet bleibender Anstoss zur Erforschung der Eigenschaften des überhitzten Dampfes gegeben, dessen Zustandsgleichung und spezifische Wärme von praktischem Interesse wurden. Die Gewinnung umfassenderen Versuchsmateriales nach dieser Richtung beschäftigt gegenwärtig eine Anzahl von Forschern, ohne endgültig abgeschlossen zu sein. Nachdem die Praxis festgestellt hatte, dass die Überhitzung nicht über gewisse Grenzen hinaus getrieben werden darf, richtete man auf Grund der Lehren der Thermodynamik sein Augenmerk auf die untere Temperaturgrenze, welche durch die Hinzufügung einer zweiten, mit SO_2 (oder NH_3) arbeitenden Dampfmaschine (Abwärmemaschine) auf das

niedrigst-mögliche Mass reduziert werden kann. Ja es fehlte nicht an Vorschlägen, auch die obere Temperaturgrenze durch Hinzunahme einer dritten, in dieser Beziehung günstigeren Flüssigkeit noch hinauszurücken; eine gründliche Untersuchung der Frage bietet die Arbeit von *Schreber*, Theorie der Mehrstoff-Dampfmaschinen.

Einen weiteren Anstoss zu wissenschaftlichen Untersuchungen verdankt die technische Thermodynamik der Dampfturbine, durch welche das alte Problem der Ausströmung von Dämpfen in den Vordergrund des Interesses getreten ist; die Grundlagen dafür waren ja auch schon in *Zeuner*'s Werk enthalten, sie bedurften aber der Erweiterung und Vertiefung namentlich durch experimentelle Untersuchung; die bemerkenswertesten experimentellen Beiträge hierzu finden sich in den Arbeiten von *Fliegner*, *Stodola*, *Lewicky* und *Büchner*, um nur die wichtigere deutsche Litteratur zu nennen. Näheres hierüber in der Abteilung b) dieses Artikels.

Durch die rasche Entwicklung der Verbrennungsmotoren ist die technische Thermodynamik mehrfach vor neue Aufgaben gestellt worden; gelegentlich des Auftretens des Dieselmotors ergab sich die Notwendigkeit, die Frage nach dem Idealprozess dieser Maschinen zu beantworten, woran sich besonders *Lorenz* und *E. Meyer* beteiligt haben; es war die Veränderlichkeit der spezifischen Wärme der Verbrennungsprodukte mit Temperatur und Druck zu untersuchen (*Mallard-Lechatelier*, *Langen* u. a.), eine Arbeit, die noch nicht zu vollem Abschluss gelangt ist. Namentlich aber erwies es sich als notwendig, Sätze der Thermochemie mit heranzuziehen, worauf schon 1898 von *Stodola* in einer Abhandlung über die Kreisprozesse der Gasmaschinen hingewiesen worden war. Doch sind nach dieser Richtung erst Anfänge zu verzeichnen (*Lorenz*, Technische Wärmelehre).

Ein hervorragendes Beispiel der Verwertung wissenschaftlicher Forschung zu praktischen Zwecken rührt abermals von *Linde* her, dessen Methode der Luftverflüssigung, auf dem unscheinbaren Drosselungsversuch von *Thomson* und *Joule* aufgebaut, sich nicht nur zu technischen, sondern namentlich auch zu wissenschaftlichen Zwecken als ausserordentlich fruchtbar erwiesen hat.

Aus den obigen, ganz kurzen Andeutungen geht wohl zur Genüge hervor, dass die technische Thermodynamik keineswegs eine abgeschlossene Wissenschaft ist, vielmehr fortwährend ihre Grenzen erweitert, alte Gebiete abstösst und vor allem danach strebt und streben muss, der rastlos schaffenden Technik feste, wissenschaftlich begründete Richtungslinien zu geben und das kostspielige, zeitraubende

empirische Tasten immer mehr durch rationelle Vorausbestimmungen zu ersetzen.

2. Die allgemeinen Gleichungen der Thermodynamik. In der Anwendung der allgemeinen Gleichungen der Thermodynamik auf spezielle Probleme ist die Technik darauf angewiesen, dass die experimentelle Physik ihr die unentbehrlichen Daten bezüglich der Konstanten für die in Betracht kommenden Körper liefert. Insofern kann man sagen, dass die monumentale Arbeit *Regnault*'s[2]) die Grundlage der technischen Thermodynamik bildet. Auf der anderen Seite aber verdankt die allgemeine Thermodynamik der Technik ganz wesentliche Anregung und Förderung. Im Auge zu behalten ist dabei stets, dass das Genauigkeitsbedürfnis der Technik in manchen Fällen durch gröbere Annäherung befriedigt wird als das der Physik.

Im folgenden sind die allgemeinen Gleichungen der Thermodynamik in der Form zusammengestellt, die in der Technik gebräuchlich ist[3]) und die, sofern sie von der in der Physik üblichen Formulierung abweicht, hauptsächlich durch die Arbeiten *Zeuner*'s begründet ist.

1) Zustandsgleichung eines Körpers (genauer gesagt: eines einfachen thermodynamischen Systems, s. Art. V 3, Nr. 3)

$$f(p, v, t) = 0.$$

2) Gleichung der inneren Arbeit pro kg

$$u = F(p, v) = \varphi(p, t) = \psi(v, t).$$

3) Wärmegleichung (erster Hauptsatz), auf 1 kg bezogen,

$$dq = du + Apdv.$$

4) Andere Form der Wärmegleichung mit Einführung der Entropie (zweiter Hauptsatz)

$$dq = Tds = du + Apdv.$$

5) Dritte Form der Wärmegleichung mit Einführung der Erzeugungswärme bei konstantem Druck, i:

$$dq = Tds = di - Avdp$$

$$\text{mit} \quad i = u + Apv.$$

Die Einführung der Grösse i, welche nichts anderes ist als das thermodynamische Potential $\mathfrak{H}_s$ (Art. 3, Nr. **16**), in die technische Thermodynamik verdankt man *Mollier*[3]); von den übrigen thermo-

2) *V. Regnault,* Relation des expériences etc. etc. Paris 1847—70, 3 Bde.

3) Nach der vorzüglichen knappen Darstellung *R. Mollier*'s in dem Abschnitt III des Kapitels über die Wärme in der 18. Auflage der „Hütte", Berlin 1903. Wegen der Einführung von i vgl. p. 284.

dynamischen Potentialen, namentlich dem in der Physik und physikalischen Chemie so überaus fruchtbaren $\mathfrak{F}_v = u - Ts$ („freie Energie“ nach *Helmholtz*), hat die Technik bislang noch keinen Gebrauch gemacht.

Aus den Gleichungen unter 3, 4 und 5 sowie aus den Betrachtungen Nr. **18** und **19** des Art. 3 folgen sodann die Beziehungen:

6) $\gamma_v = \left(\frac{dq}{dT}\right)_v = \left(\frac{dq}{dt}\right)_v = T\left(\frac{ds}{dt}\right)_v$

7) $\gamma_p = \left(\frac{dq}{dT}\right)_p = \left(\frac{dq}{dt}\right)_p = T\left(\frac{ds}{dt}\right)_p$

8) $\gamma_p - \gamma_v = AT \cdot \left(\frac{dv}{dt}\right)_p \cdot \left(\frac{dp}{dt}\right)_v \cdots$ [71] und [95].

9) $ds = A\left(\frac{dp}{dt}\right)_v dv + \gamma_v \frac{dT}{T}$ ··[95]; $= -A\left(\frac{dv}{dt}\right)_p dp + \gamma_p \frac{dT}{T}$ ···[96].

10) $A\left(\frac{dp}{dt}\right)_v = \left(\frac{ds}{dv}\right)_t \cdots$ [95]; $-A\left(\frac{dv}{dt}\right)_p = \left(\frac{ds}{dp}\right)_t \cdots$ [96].

11) $\left(\frac{du}{ds}\right)_v = T; \quad \left(\frac{du}{dv}\right)_s = -Ap; \quad \left(\frac{du}{dt}\right)_v = \gamma_v;$

$$\left(\frac{du}{dv}\right)_t = AT\left(\frac{dp}{dt}\right)_v - Ap \cdots [95].$$

12) $\left(\frac{di}{ds}\right)_p = T, \quad \left(\frac{di}{dp}\right)_s = Av; \quad \left(\frac{di}{dt}\right)_p = \gamma_p;$

$$\left(\frac{di}{dp}\right)_t = -AT\left(\frac{dv}{dt}\right)_p + Av \cdots [96]$$

13) $\left(\frac{d\gamma_v}{dv}\right)_t = AT\left(\frac{d^2p}{dt^2}\right)_v \cdots$ [92]; $\left(\frac{d\gamma_p}{dp}\right)_t = -AT\left(\frac{d^2v}{dt^2}\right)_p \cdots$ [93].

3. Graphische Darstellungen. Die technische Thermodynamik macht in ausgedehntestem Masse Gebrauch von graphischen Darstellungen, für welche meist ebene, rechtwinklige Koordinaten benutzt werden und zwar

im Spannungs- oder Arbeitsdiagramm v als Absc., p als Ordinate,
„ Entropie- „ Wärmediagramm s „ „ T „ „
„ Diagramm der Erzeugungswärme[4]) s „ „ i „ „

Bemerkenswerte Beziehungen bestehen zwischen dem Arbeits- und Wärmediagramm; einer Zustandsänderung 1—2 im ersteren (Fig. 1) entspricht eindeutig im Wärmediagramm eine Kurve 1′—2′ (Fig. 2); *Zeuner* nennt daher letztere die Abbildung der ersteren. Der Zusammenhang ist dadurch gegeben, dass aus der Zustandsgleichung 1) für jeden Punkt der Kurve 1—2 die Temperatur be-

4) Nach *Mollier* a. a. O. (Anm. 2) S. 285.

stimmt ist und dass daher aus der Verbindung der Wärmegleichung mit der Gleichung der inneren Arbeit für jeden Punkt in Fig. 1 die Entropie berechnet werden kann:

$$s = \int \frac{dq}{T} + \text{const.},$$

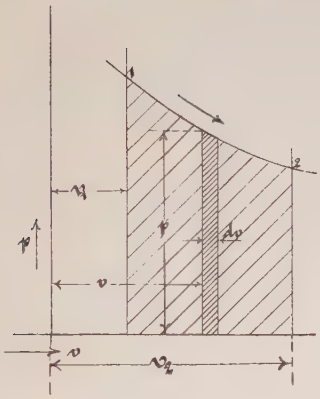


Fig. 1.

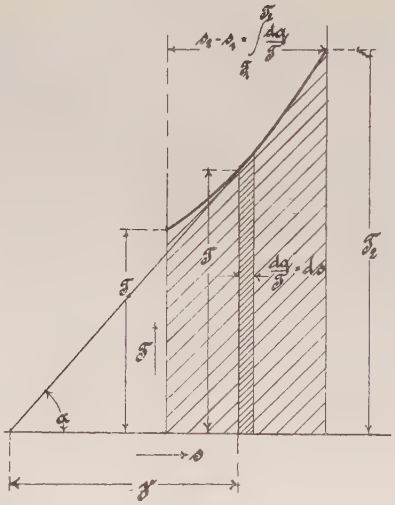


Fig. 2.

wobei die Konstante wegfällt, wenn man jedesmal den Nullpunkt von dem aus s gerechnet wird, geeignet wählt. Das Flächenelement in Fig. 1 stellt das Differential der äusseren Arbeit für die Gewichtseinheit dar, indem

$$pdv = dw; \quad \int pdv = w,$$

das Flächenelement der Fig. 2 dagegen entspricht dem zugeführten Wärmeelement, da ja:

$$Tds = T\frac{dq}{T} = dq; \quad \int T\frac{dq}{T} = q = A(u_2 - u_1) + Aw,$$

mithin stellt die Fläche zwischen der Abscissenaxe, den Endordinaten und der Kurve in Fig. 2 die gesamte von der Gewichtseinheit aufgenommene (oder abgegebene) Wärmemenge dar; das Vorzeichen wird so festgesetzt, dass ein Anwachsen der Entropie, also Wärmezufuhr von aussen, der Bewegung von links nach rechts entspricht.

Ausserdem besteht noch die Beziehung, dass in einem beliebigen Punkt des Wärmediagrammes die Subtangente gleich der spezifischen Wärme γ ist:

$$\gamma = \frac{dq}{dT} = \frac{Tds}{dT} = \frac{T}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Die Adiabaten und Isothermen erscheinen im Wärmediagramm als vertikale bezw. horizontale Gerade; wenn, wie dies bei technischen Anwendungen sehr häufig vorkommt, die Wärmezufuhr der Temperaturänderung proportional ist, hat man:

$$dq = \lambda \cdot dT$$

$$s = \int \frac{dq}{T} = \lambda \log T + \text{const.}^*)$$

Über andere Darstellungsweisen, von welchen unser Wärmediagramm ein spezieller Fall ist, s. *Mollier*[5]).

Wegen der räumlichen Darstellung, bei welcher man z. B. p, v, T als Koordinaten wählen kann, verweisen wir auf den Artikel von *Kamerlingh-Onnes*; die Technik benutzt fast ausschliesslich ebene Darstellungen.

4. Vollkommene Gase (vgl. auch V 3, Art. *Bryan*, Nr. 22). Obwohl die Technik es war, welche die Mittel geliefert hat, um den früheren Begriff des permanenten Gases als unhaltbar nachzuweisen, indem heute alle Gase als mehr oder weniger weit von ihrem Sättigungszustand entfernte, überhitzte Dämpfe erkannt sind, so macht doch die technische Thermodynamik von den auf die Kontinuität des flüssigen und gasförmigen Zustandes aufgebauten, das ganze Bereich umfassenden Gleichungen von *van der Waals* u. a. bislang keinen Gebrauch. Das Genauigkeitsbedürfnis der Technik wird vollkommen befriedigt und gleichzeitig dem in technischen Anwendungen stets auftretenden Wunsch nach möglichst einfachen und durchsichtigen Beziehungen Rechnung getragen, wenn in hergebrachter Weise der Unterschied zwischen vollkommenen (permanenten) Gasen und überhitzten Dämpfen in den zu verwendenden Zustandsgleichungen festgehalten wird und für erstere mit dem vollen Bewusstsein der, für technische Zwecke eben belanglosen Ungenauigkeit das Gesetz von *Boyle* und *Gay-Lussac* in der klassischen Form

$$pv = BT$$

zur Anwendung kommt. Hierin ist B die sogenannte Gaskonstante, bei Mischungen $B_m = \frac{\Sigma(BG)}{\Sigma(G)}$.

Dieselbe ist umgekehrt proportional der Dichte oder dem Molekulargewicht μ des Gases[6]); setzt man also $B = R/\mu$, so ist R eine

*) „log" bedeutet hier und im Folgenden stets den natürlichen Logarithmus.

5) *R. Mollier,* Das Wärmediagramm, Berlin, bei Simion 1893.

6) Setzt man für Wasserstoff als Bezugsgas $B = B_0 = 422{,}85$ und $\mu = \mu_0 = 2$, so ist für ein beliebiges Gas

für alle Gase gemeinsame, universelle Konstante. Die Zustandsgleichung des Gases geht alsdann über in

$$pv\mu = RT,$$

d. h. bezogen auf eine Gewichtsmenge von so viel kg, als das Molekulargewicht angiebt (Kilogramm-Molekül), haben alle Gase eine und dieselbe Zustandsgleichung[7]).

Benutzt man in (11) die *Boyle-Gay-Lussac*'sche Gleichung als Zustandsgleichung zur Bestimmung des partiellen Differentialquotienten, so folgt für Gase:

$$\left(\frac{du}{dv}\right)_t = AT\left(\frac{dp}{dt}\right)_v - Ap = 0,$$

d. h. die innere Arbeit der vollkommenen Gase ist nur eine Funktion der Temperatur, was für die technischen Rechnungen im allgemeinen als genügend genau angesehen wird[8]).

Setzt man ferner für vollkommene Gase innerhalb mässiger Temperaturgrenzen $\gamma_v = \text{const.}$ und $\gamma_p = \text{const.}$, so ergeben sich der Reihe nach aus (8), (11) und (12) mit der Abkürzung $\gamma_p/\gamma_v = \varkappa$ die für technische Rechnungen benutzten Beziehungen:

$$\gamma_p - \gamma_v = AB = \gamma_v(\varkappa - 1) = \gamma_p\frac{\varkappa - 1}{\varkappa},$$

$$du = \gamma_v dT = \frac{A}{\varkappa - 1}d(pv),$$

$$di = \frac{A\varkappa}{\varkappa - 1}d(pv) = \gamma_p dT,$$

$$dq = \gamma_v dT + Apdv = \gamma_p dT - Avdp$$

$$= \frac{A}{\varkappa - 1}(vdp + \varkappa pdv)$$

und nach (9)

$$s = \gamma_v \log(pv^\varkappa) + \text{const.} = \gamma_v \log p + \gamma_p \log v + \text{const.},$$

$$= \gamma_v \log(Tv^{\varkappa-1}) + \text{const.} = \gamma_v \log T + AB \log v + \text{const.},$$

$$= \gamma_p \log \frac{T}{p^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}} + \text{const.} = \gamma_p \log T - AB \log p + \text{const.}$$

$$\frac{B}{B_0} = \frac{\mu_0}{\mu}; \quad B = \frac{2 \cdot 422{,}85}{\mu} = \frac{845{,}7}{\mu},$$

wofür häufig mit praktisch genügender Annäherung gesetzt wird

$$B = \frac{2 \cdot 428}{\mu} \quad \text{oder, mit } A = \frac{1}{428}, \quad AB = \frac{2}{\mu}.$$

7) S. darüber z. B. *A. Stodola*, Z. d. Vereins Deutscher Ingenieure 42 (1898), p. 1045.

8) *W. Thomson* und *Joule* haben aus ihren Drosselungsversuchen mit Luft eine genauere Beziehung abgeleitet (s. Art. 3, Nr. **23**); auf dieselbe hat später *Linde* sein Verfahren zur Verflüssigung der Luft gegründet; vgl. diesen Art. Nr. **22**.

5. Zustandsänderungen der Gase. Alle technisch in Betracht kommenden Zustandsänderungen permanenter Gase lassen sich auf die Form der sogenannten polytropischen Kurve zurückführen, für welche, unter n einen beliebigen Exponenten verstanden,

$$pv^n = \text{const.}$$

Zur zeichnerischen Darstellung derselben sind zwei Methoden gebräuchlich. Entweder zieht man bei gegebenem Anfangszustand p_1, v_1 die unter dem Winkel α gegen die Abscissenaxe geneigte Gerade durch O, berechnet den Winkel β aus der Gleichung

$$1 + \operatorname{tg} \beta = (1 + \operatorname{tg} \alpha)^n$$

und zieht nun, wie die Fig. 3 zeigt, von den Punkten C und D ausgehend abwechselnd Senkrechte und unter 45^0 geneigte Linien, so

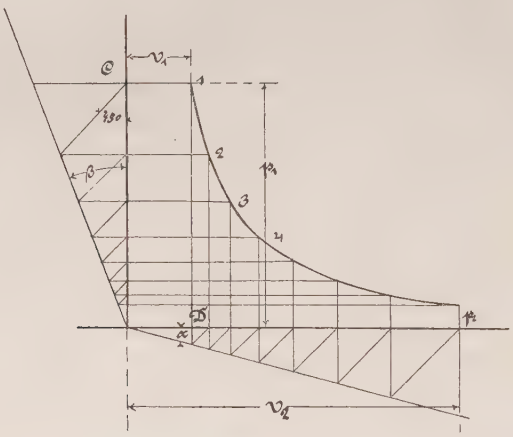


Fig. 3.

sind die Punkte 2, 3, 4 Punkte der Kurve (nach *Brauer*[9]). Oder man geht davon aus, dass

$$p_1 v_1^n = C, \quad p_2 v_2^n = C, \quad \text{also} \quad \sqrt{p_1 p_2} \cdot (\sqrt{v_1 v_2})^n = C,$$

d. h. das geometrische Mittel je zweier zusammengehöriger Koordinaten liefert einen weiteren Punkt der Kurve, was seinen graphischen Ausdruck in dem Verfahren der Fig. 4 (nach *Tolle*[10]) findet.

Aus der Gleichung der Polytrope im Verein mit der *Gay-Lussac*schen Gleichung folgen unmittelbar die Beziehungen

$$T v^{n-1} = \text{const.}, \quad \frac{T}{p^{\frac{n-1}{n}}} = \text{const.},$$

9) *E. A. Brauer*, Z. d. Vereins Deutscher Ingenieure 29 (1885), p. 433.
10) *M. Tolle*, Z. d. Vereins Deutscher Ingenieure 38 (1894), p. 1456.

$$w = \int_{(1)}^{(2)} p\,dv = \frac{1}{n-1}(p_1 v_1 - p_2 v_2) = \frac{B}{n-1}(T_1 - T_2),$$

$$Aw = \gamma_v \frac{n-1}{n-1}(T_1 - T_2),$$

$$q = \gamma_v(T_2 - T_1) + Aw = \gamma_v(T_2 - T_1)\left(1 - \frac{n-1}{n-1}\right)$$

$$= \gamma_v \frac{n-n}{n-1}(T_2 - T_1) = \gamma_n(T_2 - T_1),$$

$$\gamma_n = \gamma_v \frac{n-n}{n-1}.$$

Die Beziehung zwischen Temperatur und Volumen $Tv^{n-1} = \text{const.}$ führt sofort auf die graphische Darstellung des Verlaufes der Temperaturen durch die sogenannte *Charakteristik*, eine polytropische Kurve mit einem um 1 kleineren Exponenten, deren Konstruktion aus Fig. 5 hervorgeht. Man projiziert alle Kurvenpunkte durch Horizontale auf

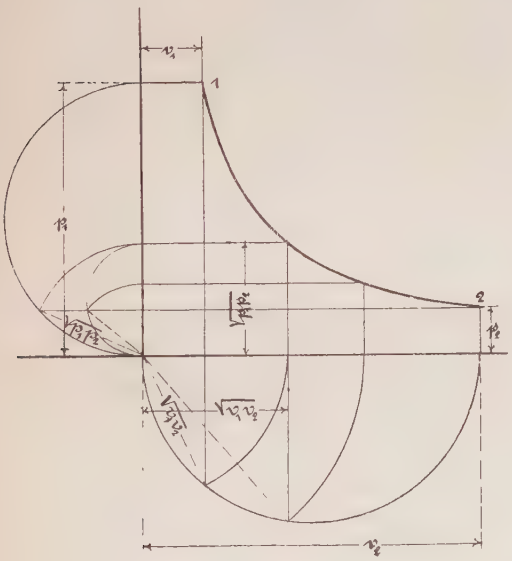


Fig. 4.

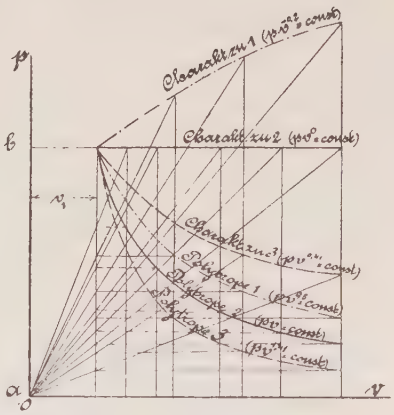


Fig. 5.

die zur Abscisse v_1 gehörige Ordinate p_1 und zieht durch die erhaltene Punktreihe ein Büschel aus O; dessen Schnittpunkte mit den zugehörigen Ordinaten liegen auf der gesuchten Kurve $pv^{n-1} = \text{const.}$, deren Ordinaten in dem Massstab $ab = T_1$ die Temperaturen darstellen. (Bei konstanter Temperatur z. B. geht die Charakteristik in eine horizontale, die Polytrope in eine gleichseitige Hyperbel über.)

Häufig liegt bei Anwendungen ein Diagramm, wie solche durch

besondere Instrumente (Indikatoren) an Maschinen aufgenommen werden, in natura vor und es handelt sich um die Bestimmung des Exponenten n der als Polytrope vorausgesetzten Kurve. Das Diagramm giebt den thatsächlichen Zusammenhang zwischen dem Gesamtvolumen V des Arbeitsstoffes und seinem Druck p an. Man verfährt dabei entweder nach Fig. 6 mit Hilfe des Planimeters; zufolge der Gleichung der

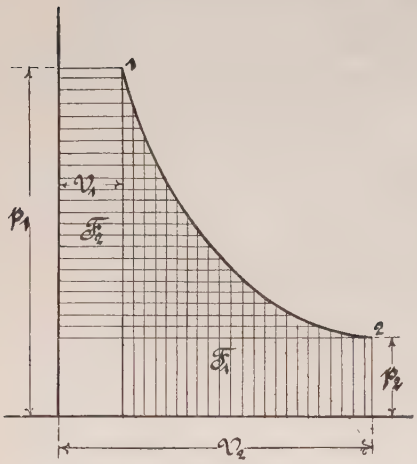


Fig. 6.

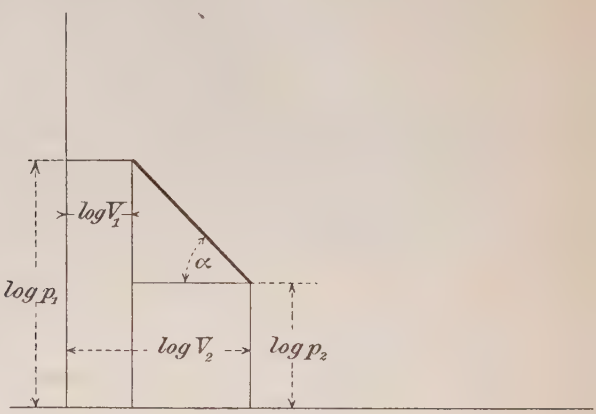


Fig. 7.

Polytrope erhält man für die zwischen der Kurve und den Koordinatenaxen gelegenen Flächen F_1 und F_2:

$$F_1 = \frac{1}{n-1}(p_1V_1 - p_2V_2) \text{ und } F_2 = \frac{n}{n-1}(p_1V_1 - p_2V_2), \text{ also } \frac{F_2}{F_1} = n.$$

Oder man trägt in rechtwinkligen Koordinaten nach der Formel

$$n \log V_2 + \log p_2 = n \log V_1 + \log p_1$$

(Fig. 7) als Abscissen die $\log V$ und als Ordinaten die $\log p$ auf; im Fall einer Polytrope erhält man eine Gerade, deren Neigungswinkel den Exponenten ergiebt, indem $n = \operatorname{tg} \alpha$.

Sehr einfach ist die Abbildung der Polytrope im Wärmediagramm, indem

$$s = \int \frac{dq}{T} = \gamma_n \log \frac{T_2}{T_1}$$

wird (Fig. 8). Die Subtangente der Kurve ist nach früherem $= \gamma_n$, also constant.

Wenn n spezielle Werte annimmt, so ergeben sich alle technisch wichtigen besonderen Zustandsänderungen, z. B.

für $n = \mp \infty$ die Zustandsänd. bei const. Volumen; $\gamma_n = \gamma_v$,
$n = 0$ „ „ „ „ Druck; $\gamma_n = \gamma_p$,
$n = 1$ „ „ const. Temperatur (Isotherme),
$n = 1{,}41 = k$, adiabatische Zustandsänd. $\gamma_n = 0$.

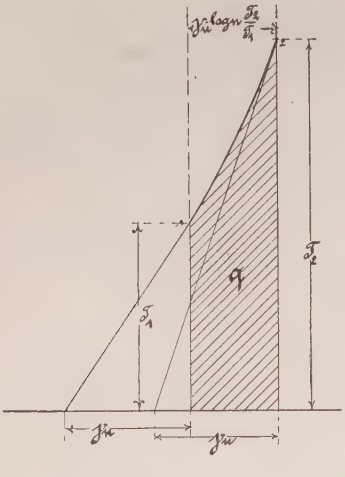


Fig. 8.

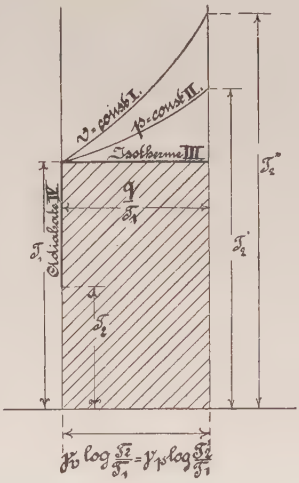


Fig. 9.

Im Wärmediagramm entsprechen diesen vier Fällen die charakteristischen Kurven I—IV (Fig. 9).

6. Gesättigte Dämpfe (vgl. auch V 3, Art. *Bryan*, Nr. **23**). Da in dem Zustand der Sättigung bei einer verdampfenden oder sich kondensierenden Flüssigkeit sowohl die Temperatur als auch das spezifische Volumen des dampfförmigen wie des flüssigen Teiles erfahrungsgemäss Funktionen des Druckes allein sind, so kommt eine Zustandsgleichung wie für die Gase hier nicht in Frage; die genannten Funktionen des Druckes werden in der technischen Thermodynamik gewöhnlich nicht in analytischer sondern in Tabellenform gegeben und zwar mittelst der nach *Regnault*'s Versuchen berechneten *Zeuner*schen Dampftabellen. Neben dem Druck führt man als zweite unabhängige Veränderliche in der Regel den spezifischen Dampfgehalt x (Dampfgewicht dividiert durch Gesamtgewicht von Dampf und Flüssigkeit) ein. Man bezeichnet als „nassen Dampf" ein Gemisch von Dampf und Flüssigkeit in gesättigtem Zustand, für welches das specifische Volumen durch die Beziehung gegeben ist:

$$v = x\,(v' - v'') + v''$$

mit den Grenzwerten

$$v = v'' \text{ für } x = 0 \quad \text{(Flüssigkeit)},$$
$$v = v' \quad „ \quad x = 1 \quad \text{(trocken gesättigter Dampf)}.$$

Die Gleichung für die innere Arbeit lautet dann

$$du = dq_p + d(x\lambda_i),$$
$$u = q_p + x\lambda_i,$$

wobei die Konstante dadurch eliminiert wird, dass alle Wärmemengen von 0° C. ab gezählt werden. (Wegen der Bedeutung von q_p, λ_i, λ sowie wegen der Beziehung $\lambda = \lambda_i + Ap(v' - v'')$ vgl. den Abschnitt „Bezeichnungen".) Als weitere, den gesättigten Dämpfen eigentümliche Gleichung tritt hinzu die Gleichung von *Clapeyron-Clausius*:

$$\frac{\lambda}{v' - v''} = AT\frac{dp}{dT} \cdots [138]$$

und schliesslich die Wärmegleichung in der allgemeinen Form:

$$dq = dq_p + d(x\lambda_i) + Ap\,dv;$$

für Wasser im speziellen, die technisch wichtigste Flüssigkeit, kann innerhalb der Grenzen der Anwendung

$$v'' = 0{,}001 = \text{const.}$$

gesetzt werden, sodass $dv = d(x(v' - v''))$ wird. Damit ergiebt sich für dq weiter, wenn man noch $Apdv = Ad(pv) - Avdp$ setzt:

$$dq = dq_p + d(x \cdot \lambda_i) + Ad(x \cdot p[v' - v'']) - Ax(v' - v'')\,dp$$

und mit Benützung der Beziehung $\lambda = \lambda_i + Ap(v' - v'')$

$$dq = dq_p + d(x\lambda) - Ax(v' - v'')\,dp.$$

Das letzte Glied lässt sich mit Benützung der Gleichung von *Clapeyron-Clausius* schreiben:

$$Ax(v' - v'')\,dp = \frac{x \cdot \lambda}{T} \cdot dT$$

und nach leichter Umformung hieraus:

$$dq = dq_p + T \cdot d\left(\frac{x\lambda}{T}\right),$$

eine Form der Wärmegleichung, die zuerst von *Clausius* gegeben wurde und sich sehr gut zur Berechnung der Entropie der gesättigten Dämpfe eignet, indem

$$\frac{dq}{T} = ds = \frac{dq_p}{T} + d\left(\frac{x\lambda}{T}\right)$$

$$s = \int_{273}^{T} \frac{dq_p}{T} + \frac{x\lambda}{T} = s'' + x(s' - s'') \ldots [140]$$

wobei s'' die Entropie der Flüssigkeit und s' diejenige des ganzen kg (Gemisch von Dampf und Flüssigkeit) bezeichnet.

Endlich wird die Erzeugungswärme bei konstantem Druck pro 1 kg des Gemisches:

$$i = q_p + x\lambda.$$

Alle Eigenschaften der gesättigten Dämpfe, welche für die tech-

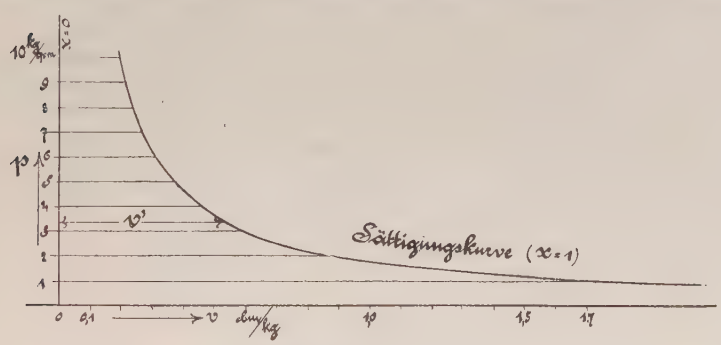


Fig. 10.

nische Thermodynamik in Betracht kommen, lassen sich mit Hilfe einer graphischen Darstellung sowohl im pv-Diagramm als im Ts-Diagramm ableiten; charakteristisch für diese Körper sind vor allem

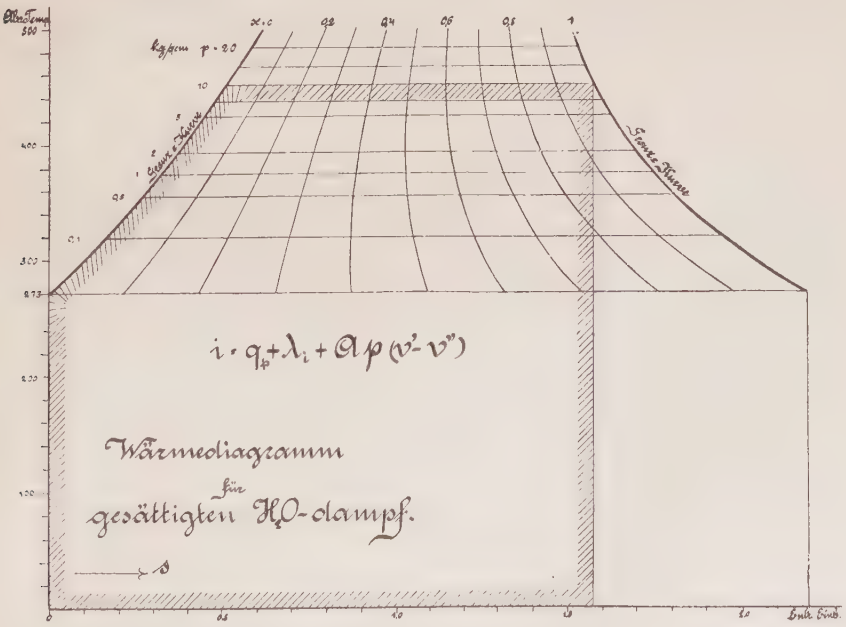


Fig. 11.

in beiden Diagrammen die sogenannten *Grenzkurven* oder *Sättigungskurven*, welche erhalten werden, wenn man einmal für gesättigte Flüssig-

keit ($x = 0$) und sodann für trockenen gesättigten Dampf ($x = 1$) den geometrischen Ort der zusammengehörigen Werte von p und v beziehungsweise von T und s darstellt — wozu die erwähnten Dampftabellen das erforderliche Zahlenmaterial, die unentbehrliche Grundlage der ganzen technischen Thermodynamik, liefern. Die Fig. 10 und 11 stellen für Wasser die betreffenden Kurven dar; für $x = 0$ fällt die Grenzkurve in Fig. 10 mit der Ordinatenaxe zusammen, weil v'' bei Wasser innerhalb der für gesättigten Dampf in Betracht kommenden Drücke so klein ist, dass es sich der zeichnerischen Darstellung entzieht; in Fig. 11 ist die Ordinatenaxe so gelegt, dass die Entropie des flüssigen H_2O bei 0^0 C. = Null gesetzt ist.

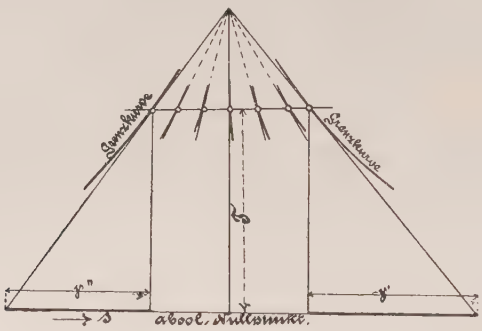


Fig. 12.

Der Inhalt der umränderten Fläche in Fig. 11 stellt in Kalorien die Gesamtwärme $q_p + \lambda_i + Ap(v' - v'')$ beziehungsweise die Erzeugungswärme i bei konstantem Druck dar; trägt man den Flächeninhalt als Ordinate i zu dem betreffenden s auf, so ergiebt sich das dritte, für die technische Thermodynamik der gesättigten Dämpfe charakteristische Diagramm Fig. 13 (nach *Mollier*[11]). In jedes dieser Diagramme ist ein Netz von Kurven konstanten Druckes eingezeichnet, welche im pv- und Ts-Diagramm als horizontale, im si-Diagramm als geneigte Gerade erscheinen; für letztere wird die Tangente des Neigungswinkels nach Gleichung (12) gleich T. Ebenso leicht lässt sich in jedes dieser Diagramme ein Netz von Kurven konstanter spezifischer Dampfmenge einzeichnen, da solche immer den horizontalen Abstand der Grenzkurven (im si-Diagramm die geneigten geraden Strecken konstanten Druckes zwischen den Grenzkurven) in gleichem konstantem Verhältnis x teilen. Infolge dessen schneiden sich die Tangenten im Ts-Diagramme (vgl. Fig. 11 oder Fig. 12, welche eine etwas

11) *R. Mollier,* Neue Diagramme zur technischen Wärmelehre, Z. d. Vereins Deutscher Ingenieure 48 (1904), p. 271.

abgeänderte Wiederholung von Fig. 11 darstellt) an alle Kurven konstanter Dampfmenge für einen bestimmten Druck in einem Punkte, wodurch sofort (als Subtangenten) die spezifischen Wärmen auf den Kurven konstanter spezifischer Dampfmenge gegeben sind, da $\gamma_x = \left(\frac{dq}{dT}\right)_x$. Man sieht auch, dass beim Durchlaufen aller Werte von x auf einer Kurve konstanten Druckes (oder konstanter Temperatur) die spezifische Wärme ihr Vorzeichen wechselt, um in dem Fusspunkte des

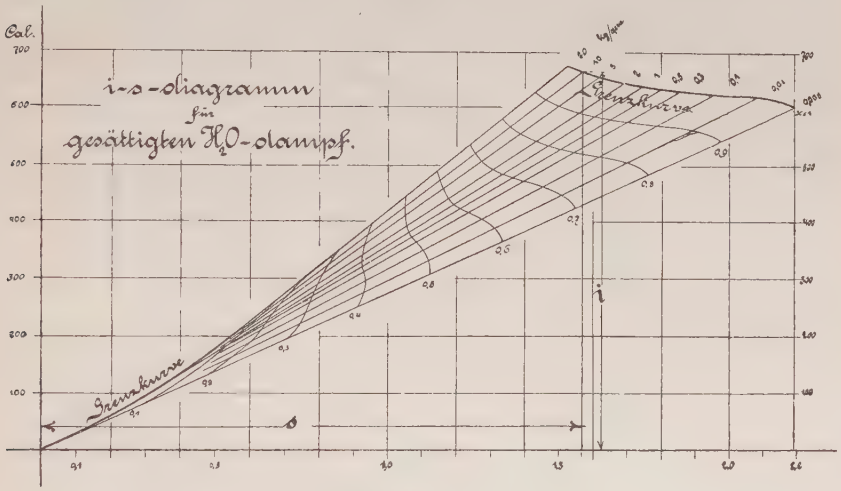


Fig. 13.

Lotes aus dem gemeinsamen Tangentenschnittpunkte zu Null zu werden. Der geometrische Ort dieser Fusspunkte heisst daher die *Nullkurve*. Man erkennt ferner aus dem Diagramm Fig. 12 ohne weiteres, dass bei Wasser γ' negativ ist, mit steigender Temperatur aber gegen Null hin wächst.

Äusserst einfach gestaltet sich im Wärmediagramm die Verfolgung der Vorgänge bei adiabatischer Expansion oder Kompression von gesättigtem Dampf — die Vertikalen zeigen sofort die dabei auftretenden Änderungen der spezifischen Dampfmenge; man sieht in Fig. 11, welchen Einfluss die anfängliche spezifische Dampfmenge auf den Umstand hat, ob im Verlauf der adiabatischen Expansion Verdampfung oder Kondensation eintritt u. s. w.

Den Vorgang der Abbildung eines pv-Diagrammes in das System des Ts-Diagrammes hat *Boulvin*[12]) in sehr eleganter und höchst einfacher Weise in ein und demselben Axenkreuz durchgeführt mit Be-

12) *J. Boulvin*, Cours de mécanique appliquée, Paris 1893, fasc. 3, p. 76. Vgl. auch Revue de mécanique 1900.

nutzung der Spannungskurve $p = f(T)$, sodass die Übertragung mit dem Lineal allein ausgeführt werden kann (s. Fig. 14).

Im oberen Quadranten rechts ist das Wärmediagramm verzeichnet, für Wasserdampf so, dass die Temperatur 0° C. mit der horizontalen

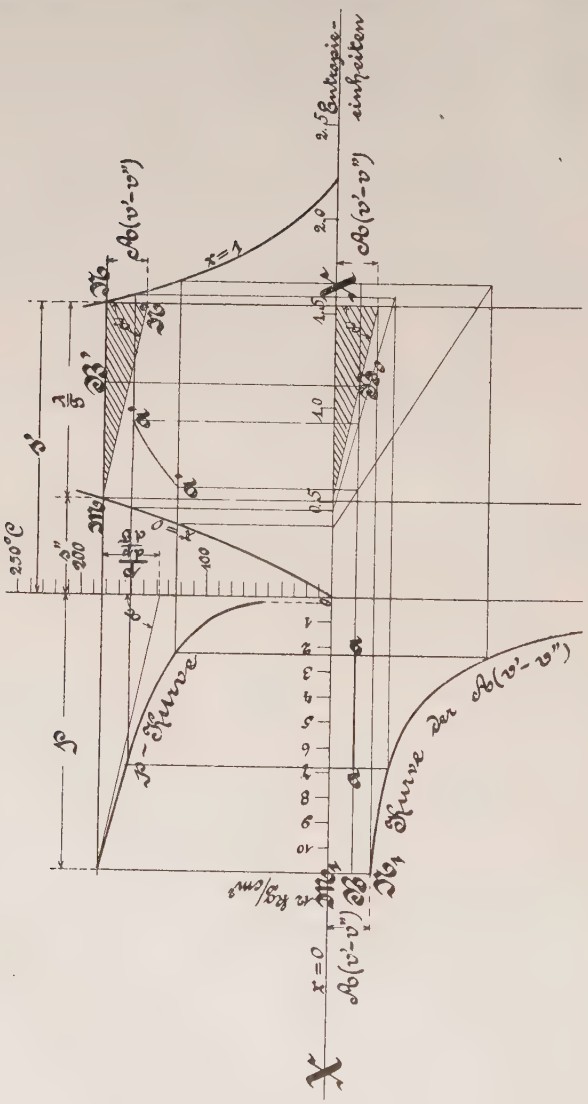


Fig. 14.

Axe X—X zusammenfällt. Im zweiten Quadranten (oben links) wird die Spannungskurve $p = f(T)$ eingetragen; zieht man eine beliebige Horizontale M—N und legt durch den Punkt M derselben (auf der Grenzkurve $x = 0$ gelegen) eine Parallele zur Tangente an

die Spannungskurve, so schneidet diese auf der Vertikalen durch N eine Strecke ab, welche $= A(v' - v'')$; es ist nämlich

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T} : A(v' - v'')$$

oder $\frac{\lambda}{v' - v''} = AT \cdot \frac{dp}{dT}$ (Gleichung von *Clapeyron-Clausius*).

Legt man das Dreieck MNN', wie die Schraffur andeutet, an die Axe $X—X$ an und überträgt man die Strecke $A(v' - v'')$ in den dritten Quadranten (links unten) als Abscisse zur Ordinate p, so erhält man die Kurve der $A(v' - v'')$. Wegen der ausserordentlichen Kleinheit von v'' bei Wasser kann man die Ordinatenaxe dieser Kurve, welche eigentlich um Av'' über der Axe $X—X$ liegt, zeichnerisch gar nicht von letzterer unterscheiden und es stellt somit die Kurve der $A(v' - v'')$ nichts anderes dar als die Sättigungskurve ($x = 1$) im Koordinatensystem p, v; sie entspricht der rechten Grenzkurve $x = 1$ im Wärmediagramm, während der Grenzkurve $x = 0$ des letzteren die Axe $X—X$ entspricht. Sucht man nun zu irgend einem Punkt B im Spannungsdiagramm den entsprechenden Punkt B' im Wärmediagramm, so hat man nur zu beachten, dass demselben ein bestimmter Wert der spezifischen Dampfmenge x zugehört, d. h., dass B' die Strecke $M—N$ im gleichen Verhältnis teilen muss, wie B die Strecke $M_1—N_1$; durch Ziehen der Geraden $B—B_0—B'$ ist also B, d. h. ein beliebiger Punkt im Sättigungsgebiet des Spannungsdiagramms, in das Wärmediagramm übertragen. Irgend eine Kurve, welche im Spannungsdiagramm gezeichnet vorliegt, z. B. die Linie konstanten Volumens $a—a$, lässt sich so punktweise, wie angedeutet, ins Wärmediagramm (Linie $a'—a'$) umsetzen. Dabei ist einleuchtend, dass die Zeichnung der Tangenten an die Spannungskurve beziehungsweise der Parallelen dazu gar nicht nötig ist — die Methode bleibt richtig, auch wenn die Sättigungskurve im p, v-System in irgend einem beliebigen Massstab (durch Auftragen der den Tabellen zu entnehmenden Werte $v' - v''$ gezeichnet wurde.

Die Darstellungsweise der Eigenschaften der gesättigten Dämpfe durch ihr Wärmediagramm giebt auch sehr anschaulichen Aufschluss über das Verhalten im kritischen Punkt und seiner Umgebung, für welchen $\left(\frac{dv}{dt}\right)_p = \infty$, $\left(\frac{dv}{dp}\right)_t = \infty$, $\left(\frac{ds}{dt}\right)_p = \infty$, $\gamma_p = \infty$. Für die *technisch* zur Zeit allein in dieser Region in Betracht kommende CO_2 nehmen die Grenzkurven im pv- und Ts-System folgende Gestalt an[13]) (Fig. 15 und Fig. 16):

13) Nach *R. Mollier*, Zeitschr. f. d. ges. Kälteindustrie 1896, p. 65; s. auch Z. d. Vereins Deutscher Ingenieure 48 (1904), p. 271.

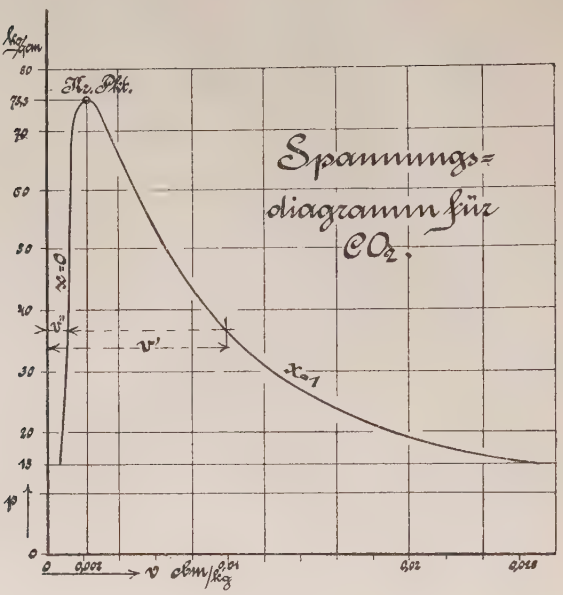

kg/qcm
Kr. Pkt.
Spannungs-
diagramm für
CO_2.
x=0
v''
v'
x=1
p
0
0,002
v cbm/kg
0,01
0,02
0,028

Fig. 15.

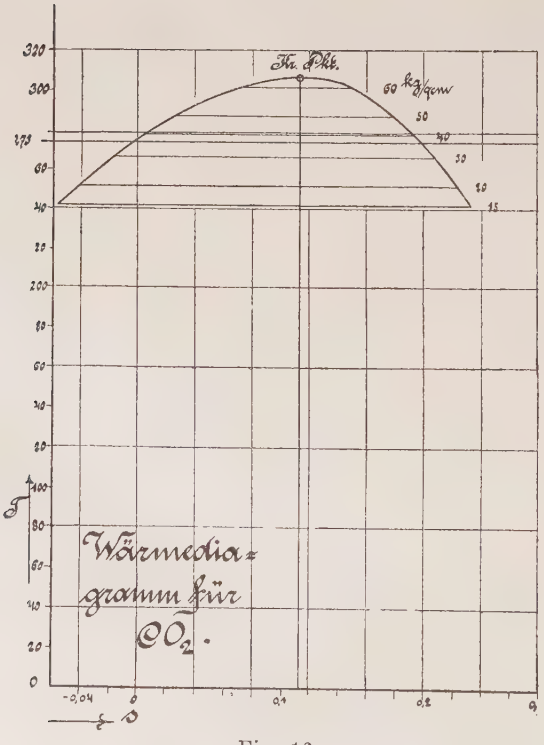

Kr. Pkt.
60 kg/qcm
50
40
30
20
15
T
Wärmedia-
gramm für
CO_2.
-0,04
0
0,1
0,2
s
v

Fig. 16.

7. Überhitzte Dämpfe. Für *technische Zwecke* ist[14]) festzuhalten, dass die Zustandsgleichung der überhitzten Dämpfe nur dann brauchbar ist, wenn sie in einfacher Weise zu gegebenem p und T das Volumen zu berechnen gestattet; dies gilt von der, in der technischen Thermodynamik bislang am häufigsten verwendeten *Zeuner*'schen Gleichung[15]), welche für Wasserdampf in der Absicht aufgestellt ist, einerseits noch für die Grenzkurve $x = 1$ die Beobachtungswerte richtig wiederzugeben und andererseits die technisch verwerteten, höchstens 500° C. erreichenden Überhitzungen mit zu umfassen. Die Gleichung lautet

$$pv = BT - Cp^{\frac{n-1}{n}} \quad (\textit{Zustandsgleichung}),$$

wo B, C und n die Konstanten des Dampfes sind. Man kann die beiden letzteren aus der Gleichung eliminieren, wenn man dafür die zum Drucke p gehörige Sättigungstemperatur T' und das zu p gehörige spezifische Volumen v' im gesättigten Zustande einführt. Schreibt man nämlich die obige Gleichung einmal für überhitzten Dampf, das andere Mal für gesättigten Dampf hin, wobei in Betracht kommt, dass dieselbe ja den letzteren Zustand noch mit umfassen soll, und subtrahiert beide von einander, so ergiebt sich:

$$v = v' + \frac{B}{p}(T - T').$$

Für die Dampfkonstante B folgt hieraus die Bedeutung

$$B = p\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p.$$

Die oben benutzte Konstante n hat für Wasserdampf den Wert 4/3.

Der Zuwachs der inneren Arbeit berechnet sich nach *Zeuner*[16]) zu

$$du = \frac{d(pv)}{n-1}.$$

Ferner ist die Erzeugungswärme bei konstantem Druck

$$i = q_p + \lambda + \gamma_p(T' - T),$$

und die Wärmegleichung

---

14) Die Experimentalphysik ist gegenwärtig (1904) am Werke, unsere noch sehr lückenhaften Kenntnisse in Bezug auf das Verhalten der überhitzten Dämpfe zu vervollständigen, namentlich in Bezug auf Zustandsgleichung und spezifische Wärme (letztere in Abhängigkeit von Temperatur und Druck) — die Rücksicht auf den Raum verbot hier, über das im Text gegebene hinauszugehen.

15) *Zeuner*, Techn. Thermodynamik 2, Leipzig 1901, p. 221.

16) Ebenda, p. 213 ff.

$$\begin{aligned} dq &= \frac{A}{n-1}(v\,dp + np\,dv) \\ &= \gamma_v\left(dT + (n-1)\,T\frac{dv}{v}\right) \\ &= \gamma_p\left(dT - \frac{n-1}{n}\,T\frac{dp}{p}\right). \end{aligned}$$

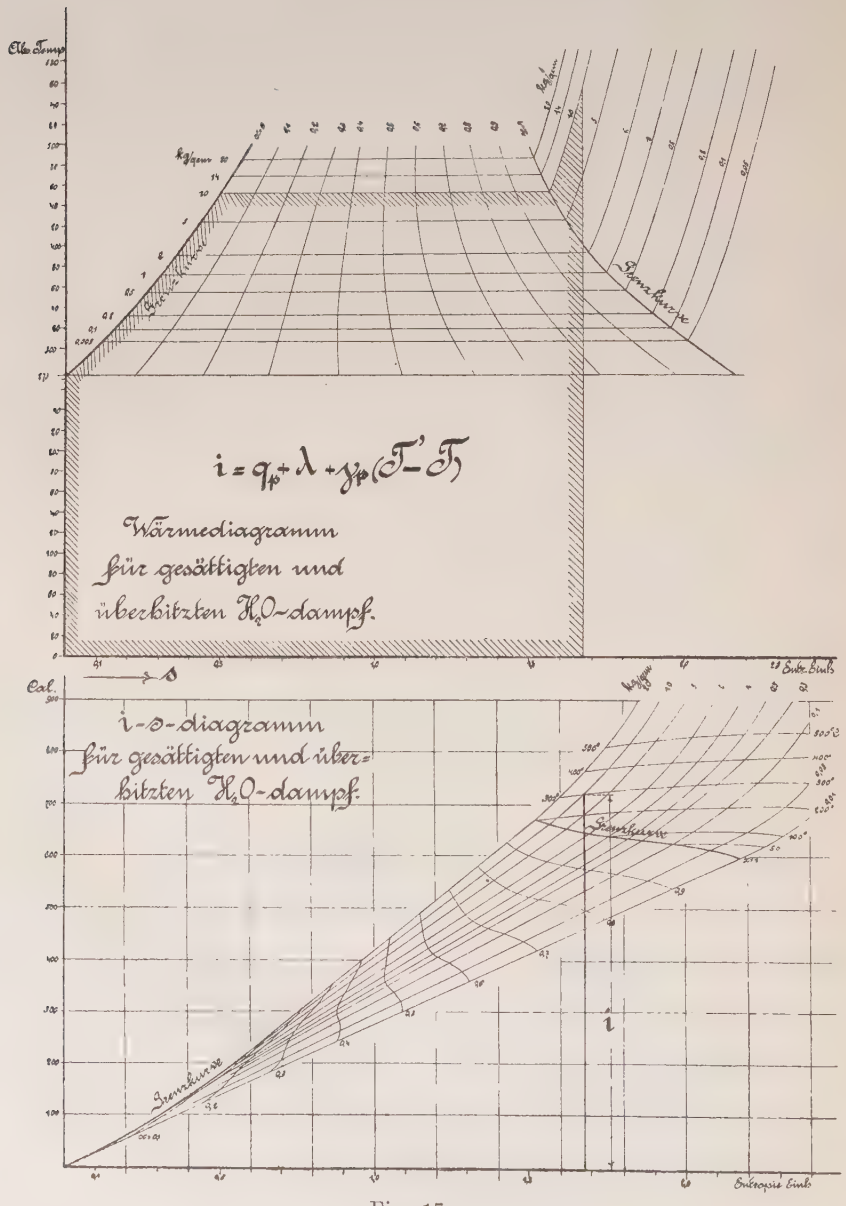


Fig. 17.

Zur Ableitung der Entropie kann man wieder von der Grenzkurve ausgehen und den Zuwachs der Entropie gegenüber dem gesättigten Zustande berechnen, indem man entweder den Druck oder das Volumen konstant hält. Mit konstanten Werten von γ_v und γ_p hat man dann

$$\text{(a)} \quad s = s' + \gamma_p \log \frac{T'}{T} \quad \text{oder} \quad \text{(b)} \quad s = s' + \gamma_v \log \frac{T'}{T};$$

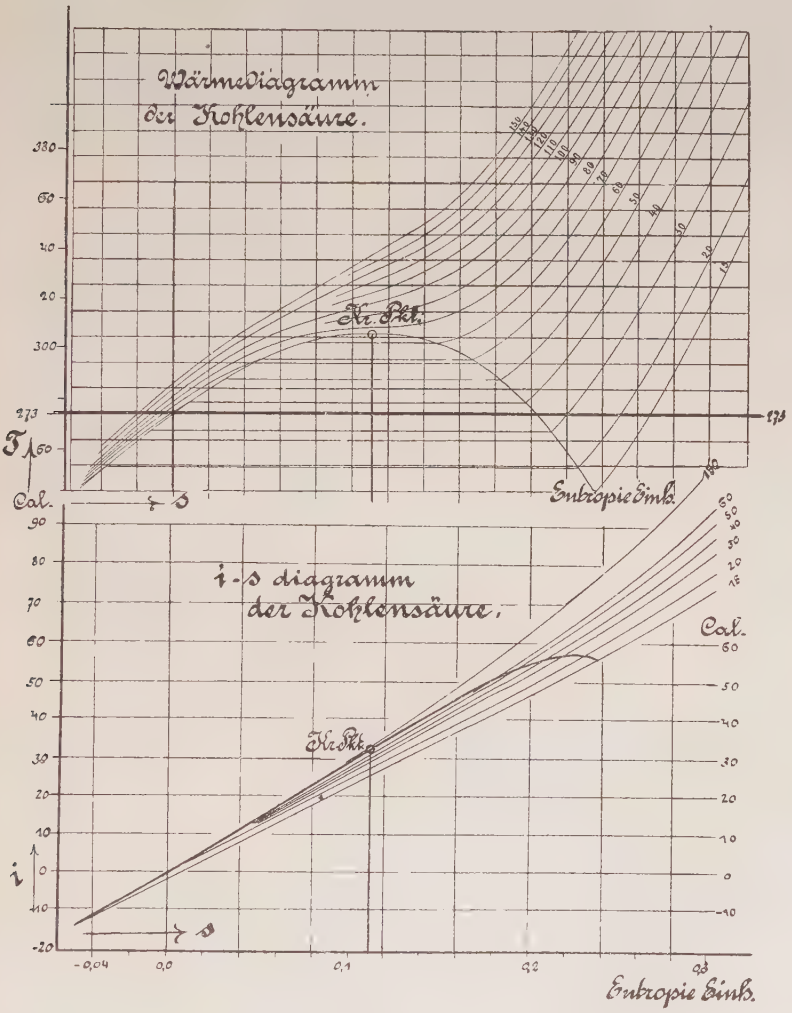


Fig. 18.

in der technischen Thermodynamik benutzt man einfach das Wärmediagramm, in welches die Kurven konstanten Druckes nach der vorstehenden Formel (a) eingezeichnet werden. Für H_2O-Dampf ist dies in Fig. 17, für CO_2 in Fig. 18 geschehen; beidemal ist das zugehörige

is-Diagramm hinzugefügt. Fig. 17 schliesst sich an Fig. 11 und 13, Fig. 18 an Fig. 16 an. Was die *is*-Diagramme betrifft, so beachte man, dass in ihnen die Kurven konstanten Druckes beim Übergange aus dem Sättigungszustand in das Gebiet der Überhitzung keine Diskontinuität der Tangentenrichtung zeigen; es ist nämlich nach Gl. (12)

$$\left(\frac{\partial i}{\partial s}\right)_p = T,$$

d. h. die Tangente des Neigungswinkels einer Kurve konstanten Druckes gegen die s-Axe ist gleich der absoluten Temperatur und verhält sich daher beim Durchgange durch die Grenzkurve stetig.

II. Kreisprozesse der thermodynamischen Maschinen.

8. Allgemeines über die technischen Kreisprozesse. Alles vorhergehende, aus der Experimentalphysik und der allgemeinen Thermodynamik herübergenommene liefert nur die notwendige, freilich noch sehr viele Lücken aufweisende Grundlage für die Lösung der Hauptaufgabe der technischen Thermodynamik, *die Arbeitsprozesse der thermodynamischen Maschinen so rationell und vorteilhaft als möglich zu gestalten.* Den Ausgangspunkt hierfür bildet das Studium des Kreisprozesses, zunächst in der Form des allgemeinen, umkehrbaren[17]) Prozesses, wie er in den Koordinaten p, V und T, S in den Fig. 19 und 20 dargestellt ist. Das Wesen desselben geht aus dieser Darstellung klar hervor: nach dem ersten Hauptsatz ist

$$AW = \left(\int\right) dQ = Q_1 - Q_2,$$

wenn Q_1 die zugeführte, Q_2 die gesamte entzogene Wärme bedeutet, nach dem zweiten Hauptsatz dagegen ist

$$\left(\int\right) \frac{dQ}{T} = 0,$$

was darin zum Ausdruck kommt, dass das Wärmediagramm, wenn Punkt für Punkt des Arbeitsdiagrammes abgebildet wird, sich schliesst. Soll, wie es die Technik verlangt, *dauernd* mit einem beliebigen arbeitenden Körper ein solcher Prozess beliebig oft ausgeführt werden, so muss einer Volumvergrösserung bei hohem Druck (ge-

17) Die Umkehrbarkeit des Prozesses, die in Wirklichkeit nicht statt hat, wird bei den allgemeinen Überlegungen im Sinne einer Idealisierung und Vereinfachung des Problems stets vorausgesetzt. Man denkt also bei diesen Überlegungen nicht eigentlich an die wirklichen Prozesse in den Maschinen, sondern an ideale Grenzfälle derselben.

leistete Expansionsarbeit) eine Volumverminderung bei niederem Druck (aufgewendete Kompressionsarbeit) beziehungsweise einer Wärmezufuhr bei höherer Temperatur eine Wärmeentziehung bei niederer Temperatur gegenüberstehen — die gewonnene Arbeit ist immer die *Differenz* von positiver und negativer Arbeit, ihr Wärmeäquivalent die *Differenz* zwischen zugeführter und entzogener Wärme.

Denkt man sich die Richtung, in der der Prozess durchlaufen wird (in der Fig. 19 und 20 durch Pfeile angedeutet), *umgekehrt*, so ist auch das Resultat das entgegengesetzte: es wird nicht Arbeit gewonnen, sondern es muss solche aufgewendet werden, die sich in

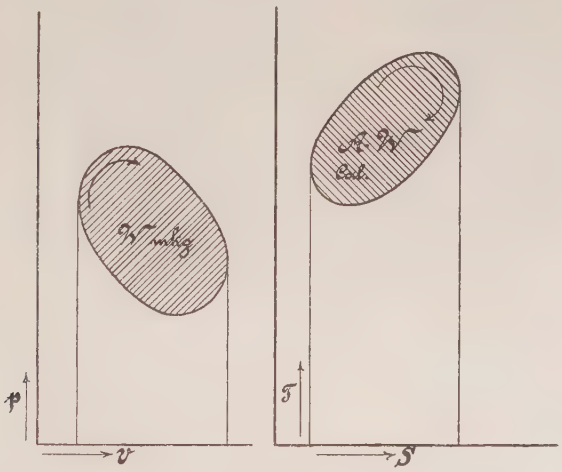


Fig. 19. Fig. 20.

Wärme verwandelt und, zu der zugeführten Wärme addiert, bewirkt, dass bei höherer Temperatur eine grössere Wärmemenge abgegeben wird als bei niederer Temperatur aufgenommen wurde. Während der direkte Prozess in den *Wärmekraftmaschinen* verwirklicht wird, bezieht sich der umgekehrte auf die *Kältemaschinen* (bei welchen der Hauptnachdruck auf der Wärmezufuhr bei *niederer* Temperatur liegt). Kennzeichnend für die Ökonomie des Prozesses ist im einen wie im andern Falle der *Wirkungsgrad*, d. h. das Verhältnis des Erzeugnisses der Maschine (bei den Wärmekraftmaschinen: mechanische Arbeit; bei der Kältemaschine: erzeugte Kälte) zu dem dafür zu leistenden Aufwand (bei der Wärmekraftmaschine: zugeführte Wärme; bei der Kältemaschine: aufgewendete mechanische Arbeit); der Prozess ist jederzeit so zu leiten, dass der Wirkungsgrad unter den gegebenen Bedingungen ein Maximum wird.

9. Die Wärmekraftmaschinen und ihr Wirkungsgrad. Eine allgemeine Formulierung der Bedingungen des maximalen Wirkungsgrades gewinnt man durch Zerlegung des Diagrammes in Elementarprozesse besonderer Art, wie sie von *Carnot* betrachtet worden sind[18]); man legt eine Schar von unendlich benachbarten adiabatischen Kurven durch das Diagramm (vgl. Fig. 21 und 22) und denkt sich mit verschwindend kleinem Fehler die Stücke der Diagrammkurve zwischen je zwei aufeinander folgenden Adiabaten durch unendlich kleine Stücke

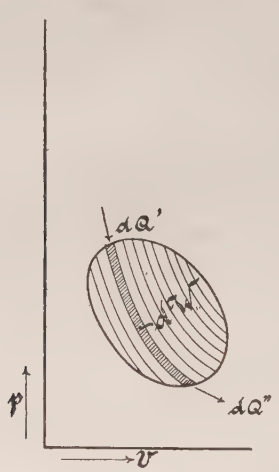


Fig. 21.

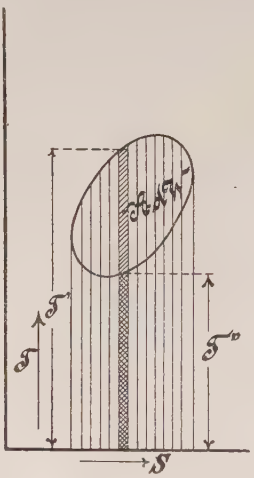


Fig. 22.

von Isothermen ersetzt, auf welchen z. B. bei der Temperatur T' das Wärmeelement dQ' zugeführt, bei T'' das Element dQ'' abgeleitet wird. Für einen solchen elementaren *Carnot*'schen Prozess gilt die Beziehung für den Wirkungsgrad (vgl. Art. 3, Nr. 7):

$$\eta = \frac{T' - T''}{T'}, \quad AdW = \frac{dQ'}{T'}(T' - T'');$$

hieraus leitet man als Grundregel für Wärmekraftmaschinenprozesse ab: *Jedes zugeführte Wärmeelement muss bei der höchstmöglichen Temperatur zugeführt, jedes abzuleitende bei möglichst tiefer Temperatur abgeleitet werden.*

Danach ergiebt sich die Bedeutung des zweiten Hauptsatzes für die Technik, indem er darüber aufklärt, wie ein Kreisprozess mit Rücksicht auf ökonomische Verwertung der Wärme eingerichtet werden

18) *Sadi Carnot,* Reflexions sur la puissance motrice du feu 1824. Wiederabdruck 1878 Paris, Gauthier-Villars. Auch in *Ostwald*'s Klassikern, Nr. 37, Leipzig 1892.

muss und welchen Grenzwert die überhaupt mögliche Ausnützung einer gegebenen Wärmemenge besitzt. Von besonderer Wichtigkeit ist die mit Hilfe des zweiten Hauptsatzes für einen *Carnot*'schen Elementarprozess gewonnene Einsicht, dass das Wärmeäquivalent der nach aussen abgegebenen Arbeit dW ein Produkt aus zwei Faktoren ist: Entropie $\left(\frac{dQ}{T}\right)$ mal Temperaturdifferenz $(T_1 - T_2)$. Man kann dies so aussprechen: Die aus Wärme zu gewinnende mechanische Energie hat zwei Faktoren, einen *Extensitäts-* und einen *Intensitäts*faktor; denkt man sich im Wärmediagramm die in der Natur ein für allemal fest gegebene tiefste Temperatur T_2 eingetragen und zählt man die Ordinaten von dieser Axe aus, so ist der geometrische Ort aller Punkte, welche gleichen Arbeitsleistungen entsprechen, eine gleichseitige Hyperbel; einer Abnahme des Intensitätsfaktors entspricht bei festgehaltener Arbeitsleistung eine solche Zunahme des Extensitätsfaktors, dass das Produkt das gleiche bleibt.

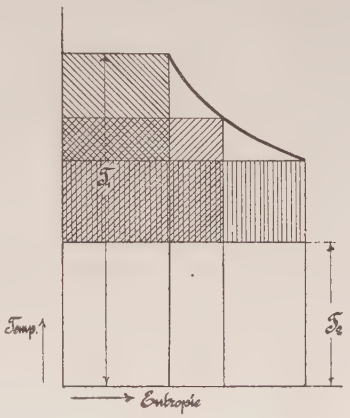


Fig. 23.

In Fig. 23 sind drei endliche *Carnot*'sche Prozesse von der gleichen Arbeitsleistung eingetragen, die sich also im Wärmediagramm der Fig. 23 durch inhaltsgleiche Rechtecke darstellen; allein diese verschiedenen, endlichen *Carnot*'schen Prozesse sind nicht etwa *gleichwertig*, denn der Wirkungsgrad nimmt mit zunehmendem Extensitätsfaktor ab, weil

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{(T_1 - T_2) + T_2} = \frac{1}{1 + \frac{T_2}{T_1 - T_2}}.$$

Ist also, wie angenommen, T_2 gegeben, so wird der Wirkungsgrad desjenigen *Carnot*'schen Prozesses am günstigsten, für den T_1 möglichst gross ist. In Fig. 23 ist dies derjenige Prozess, der durch das Rechteck von grösster Höhe dargestellt wird.

Aus Fig. 24 und 25 ist leicht ersichtlich, dass und warum irgend ein Kreisprozess (1 — 2 — 3 — 4 — 1), bei welchem während des Überganges von T_1 nach T_2 die Entropie sich verändert, einen kleineren Wirkungsgrad haben muss als ein Prozess, bei welchem sie konstant bleibt, d. h. als ein Prozess mit adiabatischem Übergang. Nimmt die Entropie auf dem Wege 1 — 2 zu (Fig. 24), so wird bei gleicher zu-

geführter Wärme ($a4bca = a412da$) die entzogene Wärme bei einem *Carnot*'schen Prozess ($a3b'ca$) kleiner, als bei dem Prozess mit zunehmender Entropie ($a32da$), daher der Wirkungsgrad des letzteren kleiner; bei abnehmender Entropie (Fig. 25) auf dem Wege 1—2 wird bei gleicher zugeführter Wärme ($a41ba$) die Arbeit (34123)

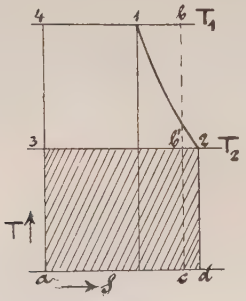


Fig. 24.

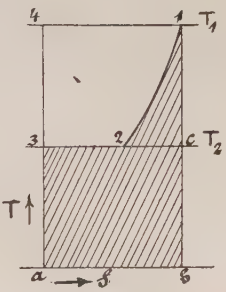


Fig. 25.

kleiner als bei dem entsprechenden *Carnot*'schen Prozess ($341c3$) und daher abermals der Wirkungsgrad jenes Prozesses kleiner wie der des *Carnot*'schen.

Für die Anwendung auf thermodynamische Maschinen folgt nun freilich aus der oben dargestellten Zerlegung eines Prozesses in *Carnot*'sche Elementarprozesse nicht, dass man *unter allen Umständen* dahin streben müsse, jedes zuzuführende Wärmeelement dQ' bei *einer und derselben* höchsten Temperatur zuzuführen und *sämtliche* Wärmeelemente dQ'' bei *konstanter* tiefster Temperatur abzuleiten, also einen endlichen *Carnot*'schen Prozess als Idealprozess einer *jeden* thermodynamischen Maschine anzustreben. Aus den für die Ausführung solcher Maschinen massgebenden Bedingungen geht vielmehr ein etwas anderer Prozess als *allgemein giltiges* Ideal hervor.

Bedenkt man nämlich, dass Wärmemitteilung und -entziehung in Wirklichkeit nur durch Vermittlung von wärmeren, beziehungsweise kälteren Körpern möglich ist, so wird sofort klar, dass zum Prozess der Wärmekraftmaschinen ausser dem „arbeitenden" Körper noch ein oder mehrere „Heizkörper", welche Wärme liefern, sowie ein oder mehrere „Kühlkörper", welche Wärme aufnehmen, gehören. Erstere müssen notwendigerweise während der Wärmeabgabe sich abkühlen, letztere während der Wärmeaufnahme sich erwärmen, da beide nur eine endliche Wärmekapazität haben. Wenn die Wärmeübertragung aber vollkommen wäre, so müsste in jedem Moment Gleichheit der Temperatur zwischen wärmeaufnehmendem und wärmeabgebendem Körper bestehen — der Übergang von den hohen Temperaturen der

Wärmeaufnahmeperiode zu den tiefen der Wärmeentziehungsperiode müsste durch adiabatische Arbeit (Expansion und Kompression) erfolgen. Während derselben muss der arbeitende Körper sowohl vom Kühlkörper als vom Heizkörper vollständig getrennt bleiben, damit die Temperaturerniedrigung bis zur tiefsten Temperatur des Kühlkörpers beziehungsweise die Temperaturerhöhung auf die höchste Temperatur des Heizkörpers in der günstigsten Weise d. h. bei konstanter Entropie erfolgen kann, wie es auch der *Carnot*'sche Prozess verlangt.

Mit Recht hat *Lorenz*[19]) hervorgehoben, dass der auf obiger Überlegung beruhende, von ihm eingeführte Prozess, aus zwei Adiabaten und zwei polytropischen Kurven bestehend, besser als der *Carnot*'sche, zwischen zwei Isothermen und zwei Adiabaten verlaufende Prozess geeignet sei, den Idealprozess der thermodynamischen Maschinen allgemein darzustellen, weil er nicht, wie jener, die Forderung unendlich grosser Mengen des Heiz- beziehungsweise Kühlkörpers erhebt, sondern sich an die in Wirklichkeit bestehenden Verhältnisse besser anschliesst, ohne den oben dargelegten Grundsatz zu verläugnen.

Im pV- und TS-System ist in Fig. 26 und 27 dieser Prozess

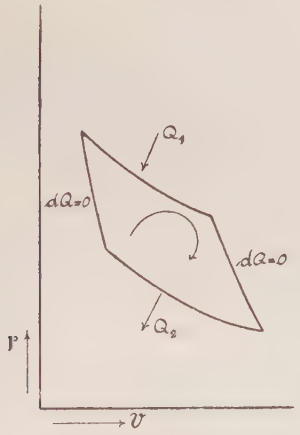


Fig. 26.

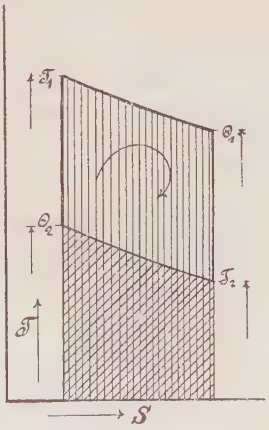


Fig. 27.

dargestellt; sei H die Gewichtsmenge des Heizkörpers, die zur Verfügung steht, γ_h seine spezifische Wärme, so ist ein von dem Heizkörper abgegebenes Wärmeelement $dQ_1 = \gamma_h H dT$; mit K und γ_k für den Kühlkörper wird ein von dem Kühlkörper aufgenommenes Wärmeelement $dQ_2 = \gamma_k K dT$; bedeuten dS_1 und dS_2 die zugehörigen

19) *H. Lorenz*, Die Grenzwerte der thermodynamischen Energieumwandlung. Diss. München, Oldenbourg 1895.

Entropieänderungen bei der Wärmezufuhr bezw. Wärmeabgabe, so gilt für diese:

$$dS_1 = \gamma_h H d\log T; \quad dS_2 = \gamma_k K d\log T$$

Nach Nr. **4** entsprechen diese Werte in der That dem Gesetz je einer polytropischen Kurve bezw. ihrem Abbild im Wärmediagramm. Mit den Bezeichnungen der Fig. 26 und 27 ergiebt sich sodann für die Gesamtwärme Q_1 oder Q_2, die der Heizkörper abgiebt oder der Kühlkörper aufnimmt:

$$Q_1 = \gamma_h H(T_1 - \Theta_1); \quad Q_2 = \gamma_k K(\Theta_2 - T_2);$$

wobei nach dem zweiten Hauptsatz sein muss

$$\int_{\Theta_1}^{T_1} \frac{\gamma_h H d T}{T} = \int_{T_2}^{\Theta_2} \frac{\gamma_k K d T}{T}$$

d. h.

$$\left(\frac{T_1}{\Theta_1}\right)^{\gamma_h H} = \left(\frac{\Theta_2}{T_2}\right)^{\gamma_k K},$$

Der Wirkungsgrad dieses Prozesses berechnet sich nun zu

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{\gamma_k K(\Theta_2 - T_2)}{\gamma_h H(T_1 - \Theta_1)}.$$

In dem Falle, dass die beiden Polytropen den gleichen Exponenten haben (so z. B. beim *Otto*'schen Viertaktprozess, vgl. Nr. **13**) wird

$$\eta = \frac{T_1 - \Theta_2}{T_1} = \frac{\Theta_1 - T_2}{\Theta_1}.$$

Die Natur des arbeitenden Körpers tritt hier, wie beim Carnot-schen Prozess vollständig zurück; in Wirklichkeit spielt dieselbe freilich wegen der durch sie bedingten Druck- und Volumverhältnisse eine entscheidende Rolle und deshalb ist man heute in der technischen Thermodynamik überwiegend dazu gelangt, nicht für alle Wärmekraftmaschinen einen einzigen Idealprozess aufzustellen, mit welchem man die ausgeführte Maschine vergleicht, sondern man leitet für jede Kategorie solcher Maschinen (Dampfmaschinen, Gasmaschinen etc.) aus den besonderen Eigenschaften des arbeitenden Körpers einen abstrakten „verlustlosen Prozess" ab und misst an diesem das Ergebnis des wirklich ausgeführten Prozesses.

Unter den verschiedenen Arten von Wärmekraftmaschinen sind die technisch wichtigsten die Dampfmaschinen und die Verbrennungsmotoren (Gasmotoren u. s. w.). Diese beiden Gattungen sollen hier allein Behandlung finden. Über Heissluftmaschinen, die heute technisch bedeutungslos sind, existieren aus älterer Zeit eine Reihe schöner

Arbeiten, hinsichtlich derer aber hier ein Hinweis auf die Lehrbücher genügen mag: Man findet sie behandelt in *Zeuner*, Thermod. 1, § 49—65, *Weyrauch* § 51—57. Die Theorie der Arbeitsübertragung mit Druckluft, in die auch die Thermodynamik hineinspielt, ist bei *Weyrauch* § 58 dargestellt.

10. Die Dampfmaschine im besonderen. Für die *Dampfmaschine* ist, so lange sie mit gesättigten Dämpfen arbeitet, durch die Natur der Sache isothermische Wärmezufuhr (während der Dampfbildung) und Wärmeableitung (während der Kondensation) gegeben — es ist hier überhaupt gar nicht möglich, polytropische Kurven anzuwenden, sodass der verlustlose ideale Prozess *in diesem Falle* allerdings der *Carnot*'sche wird (Fig. 28 und 29). Die obere Temperatur T_1 ist dabei die dem Kesseldruck entsprechende Siedetemperatur, die untere Temperatur T_2 ist bei Auspuffmaschinen die atmosphärische

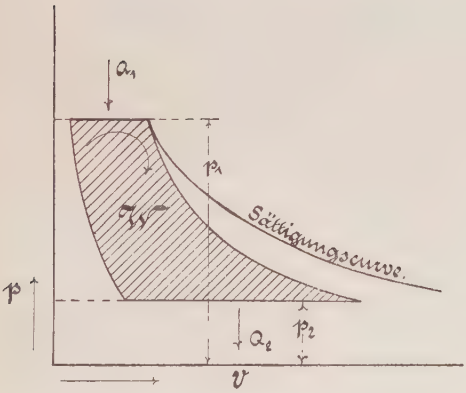


Fig 28.

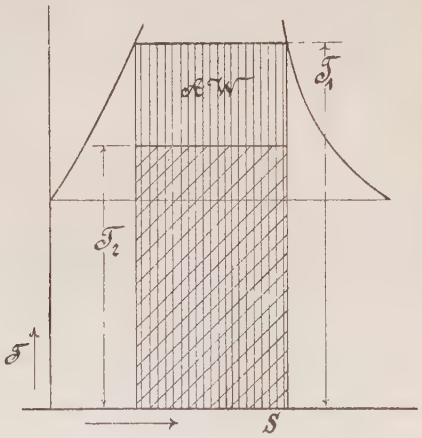


Fig. 29.

Siedetemperatur, bei Maschinen mit Kondensator[20]) die im Kondensator herrschende Temperatur. In diesem Referat ist weiterhin immer dieser letztere Fall angenommen; er ist der thermodynamisch vollkommenere, und nur dann dem ersten wirtschaftlich unterlegen, wenn die Wärme Q_2 des Auspuffdampfes zu irgend welchen Heizzwecken Verwendung findet. In letzterem Falle wird die Auspuffmaschine die wirtschaftlichste Wärmekraftmaschine.

---

20) Über die Theorie des Kondensators vgl. z. B. *Zeuner*, Thermod. 2, § 18 und 19. Reiches Zahlenmaterial findet man in dem Buche von *E. Hausbrand* (vgl. Litteraturübersicht).

Zur Verwirklichung dieses Idealprozesses müsste, in Anlehnung an die ausgeführte Konstruktion, aber unter Abstraktion von allen auftretenden Unvollkommenheiten, die in Fig. 30 dargestellte Anordnung getroffen werden. AA ist ein Röhrenkessel, mit Wasser und Dampf vom Druck p_1 gefüllt und von einem Gefäss B umgeben, in welchem sich eine Heizflüssigkeit (die Heizgase der Feuerung) befindet, welche fortwährend Wärme an das Wasser in A abgiebt

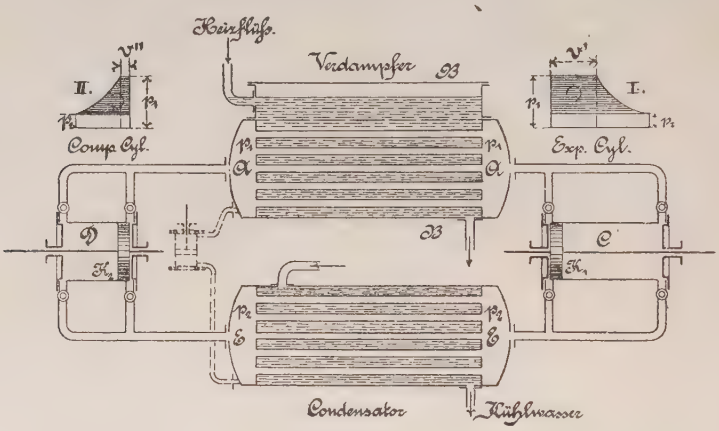


Fig. 30.

und dasselbe beim Druck p_1 in Dampf verwandelt. Ein ähnlicher Röhrenkessel EE bildet den Kühlapparat (Kondensator); er ist ebenfalls mit Wasser und Dampf aber von dem niedrigen Druck p_2 gefüllt und wird von einem Gefäss umgeben, durch welches Kühlwasser getrieben wird, welches fortwährend dem in EE befindlichen Gemisch Wärme entzieht, d. h. den Dampf beim konstanten Druck p_2 kondensiert. Beide Apparate sind durch die Cylinder C und D mit den Arbeitskolben K_1 und K_2 verbunden, wobei C Expansionscylinder, D Kompressionscylinder ist. Durch die Rohrleitungen und Ein- sowie Auslassorgane wird nun ermöglicht, dass bei jedem Spiel oder Prozess G kg im Kessel A gebildeter Dampf in den Cylinder C eintreten, dort bei Hin- und Rückgang des Kolbens das Diagramm I liefernd, während gleichzeitig aus E ebenfalls Gkg Mischung nach D übertreten, dort komprimiert und verflüssigt werden unter Aufwand der durch das Diagramm II dargestellten, von aussen in die Maschine einzuführenden Arbeit und schliesslich in flüssigem Zustand mit dem Druck p_1 nach A zurückgelangen, um abermals verdampft zu werden und das Spiel von neuem zu beginnen. Man hat es also mit einer sogenannten geschlossenen Maschine zu thun, bei der ein und dasselbe

Quantum des arbeitenden Körpers immer wieder den Prozess vollführt. Man kann Fig. 28 so auffassen, dass in ihr die Diagramme I und II aufeinander gezeichnet sind, wobei dem Diagramme I das bis an die Ordinatenaxe heran horizontal verlängerte schraffierte Gebiet der Fig. 28, dem Diagramme II die Fläche zwischen Ordinatenaxe und schraffiertem Gebiet entspricht. Die Differenz von I und II ergiebt in der schraffierten Fläche der Fig. 28 die sogenannte „indizierte Leistung".

Der Wirkungsgrad einer solchen vollkommenen Dampfmaschine ist lediglich eine Funktion der Temperaturgrenzen

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

und wird im idealen Fall auch dadurch nicht geändert, dass man den ganzen Prozess teilt, d. h. dass man z. B. zwischen T_1 und T' eine erste Maschine mit einer bestimmten Arbeitsflüssigkeit A_1 zwischen T' und T'' eine zweite mit B und zwischen T'' und T_2 eine dritte Maschine mit einer dritten Arbeitsflüssigkeit C wirken lässt; es sind dann drei solche Kombinationen, wie Fig. 30 deren eine zeigt, nötig;

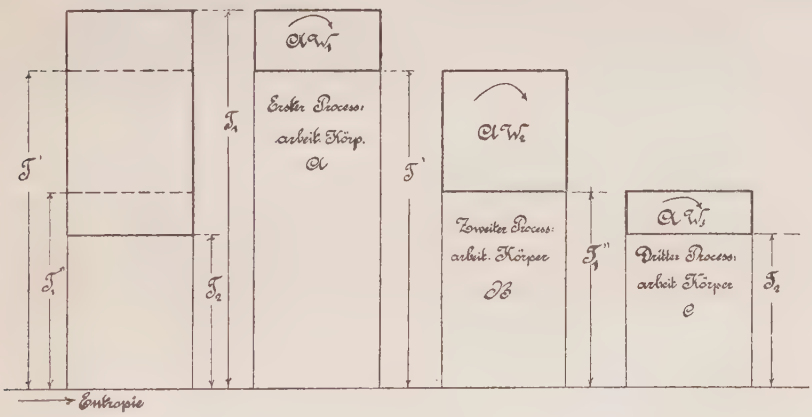


Fig. 31.

die im ersten Prozess entzogene Wärme dient im zweiten als zugeführte (an Stelle der durch die Heizgase abgegebenen) und ähnliches gilt für den Zusammenhang des zweiten und dritten Prozesses. Solche Kombinationen sind als „mehrstoffige Dampfmaschinen"[21]), auch „Abwärmekraftmaschinen"[22]) ausgeführt; das *Carnot*'sche Diagramm einer dreistoffigen Maschine zeigt Fig. 31.

---

21) *K. Schreber,* Die Theorie der Mehrstoffdampfmaschinen, Leipzig 1903.

22) *E. Josse*, Neuere Erfahrungen mit Abwärmekraftmaschinen, München und Berlin, Oldenburg 1901.

Während Wirkungsgrad und Arbeitsverhältnis in der idealisierten Betrachtung durch die Unterteilung des ganzen Prozesses nicht geändert werden und daher eine solche Unterteilung scheinbar zwecklos ist, kann dieselbe unter den thatsächlichen Verhältnissen der Praxis dennoch Vorteile gewähren.

Die wirklich ausgeführte Dampfmaschine unterscheidet sich von der Anordnung in Fig. 30 dadurch, dass der Kompressionscylinder nicht ein Gemisch von Dampf und Flüssigkeit dem Kondensator entnimmt, sondern nur Flüssigkeit und diese in den Kessel A hinüberdrückt, ohne ihre Temperatur zu ändern; hierzu muss im Kessel noch die Flüssigkeitswärme zugeführt werden. Der Cylinder D reduziert sich also in der Praxis auf eine Speisepumpe (punktiert gezeichnet in Fig. 30) und sein Diagramm auf das Rechteck $(p_1 - p_2)v''$. Dies

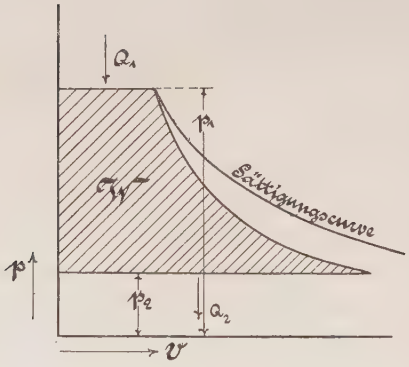


Fig. 32.

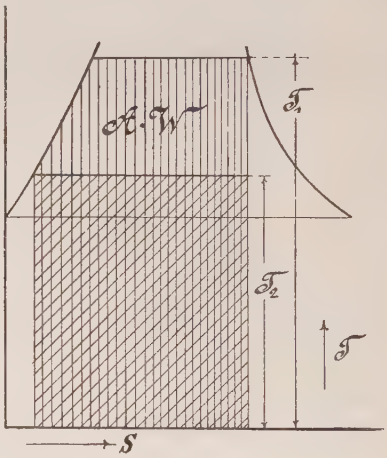


Fig. 33.

hat zur Folge, dass das Diagramm einer Idealdampfmaschine nunmehr die Gestalt annimmt, wie sie in Fig. 32 und 33 dargestellt ist; man bezeichnet diesen Prozess als den *Rankine-Clausius*'schen Prozess[23]) und betrachtet die vorliegende Abweichung vom reinen *Carnot*'schen Prozess nicht als eine Unvollkommenheit der ausgeführten Dampfmaschine.

Die in neuester Zeit in den Vordergrund des Interesses getretenen *Dampfturbinen* stellen nicht etwa eine prinzipielle Verbesserung der Wärmeausnützung dar — es lässt sich leicht zeigen, dass das Diagramm des *Clausius-Rankine*'schen Prozesses auch für diese Maschinen

23) *Rankine*, The Steam Engine, IX. Edition, p. 376; *Clausius*, Mech. Wärmetheorie 2, Abschnitt XI, § 4.

das Ideal darstellt und die Erfahrung hat gezeigt, dass auch die Annäherung der ausgeführten Dampfturbine an den vollkommenen Prozess im Grossen und Ganzen dieselbe ist wie bei der Kolbendampfmaschine. Vgl. hierzu Nr. **23** dieses Artikels.

Die Wirkungsgrade der vollkommenen Dampfmaschine nach Fig. 32 und 33 sind sehr niedrig, weil die Spannungskurve des Wasserdampfes (der einzigen Flüssigkeit, die bis heute für die obere Temperaturgrenze in Betracht kommt) verhältnismässig niedere Werte von T_1 bedingt; man erhält z. B. für

$$p_2 = 0{,}1 \text{ kg/qcm}, \quad T_2 = 318{,}6^0 \text{ abs.}$$

bei

p_1	=	6	7	8	10	12 kg/qcm
η	=	0,239	0,247	0,253	0,266	0,276

und die wirklich ausgeführte Dampfmaschine erreicht im allergünstigsten Fall mit allen modernen Errungenschaften höchstens 73 Prozent dieser Werte, also bei $p_1 = 12$ Atm. rund 0,20!

11. Verbundmaschine. Anwendung von überhitztem Dampf. Die zuletzt genannten Errungenschaften beziehen sich bei der Kolbendampfmaschine auf die Anwendung von Mitteln, um den *Wärmeaustausch zwischen Dampf und Cylinderwandungen* möglichst unschädlich zu machen. Die weitaus wichtigste und für die Ökonomie nachteiligste Abweichung der Wirklichkeit von den Voraussetzungen des *Rankine-Clausius*-Prozesses ist nämlich die Unmöglichkeit, in einem metallischen Cylinder, dessen Wandungen eine niedrigere Temperatur haben, als die Sättigungstemperatur, die dem Druck des eintretenden Dampfes entspricht, die teilweise Kondensation des letzteren durch Berührung mit den Wänden zu verhindern. Hierdurch geht natürlich diejenige Wärmemenge für den Arbeitsprozess zum grössten Teil verloren, die man ursprünglich zur Erzeugung des an den Wandungen wieder verflüssigten Dampfes aufgewendet hat.

Das Verdienst diese Verlustquelle zuerst erkannt zu haben, gebührt *A. Hirn* (vgl. Nr. **1**, p. 241). Eine analytische Untersuchung der Wärmewirkung der Cylinderwandungen ist von *E. G. Kirsch* gegeben worden (vgl. Litteraturübersicht).

Die erfolgreichsten Einrichtungen der Neuzeit zur Verminderung der durch die geschilderten Umstände bewirkten Abweichung vom Idealprozess der Dampfmaschine sind: die Verteilung der gesamten Expansion auf mehrere Cylinder (*Compound-* oder *Verbundmaschine, Mehrfach-Expansionsmaschine*) und die *Überhitzung des Dampfes.*

Der Grundgedanke der *ersteren* besteht darin, die Abkühlung der Wandungen, die bei der Eincylindermaschine durch die Berührung der Wände mit dem unter dem niedrigen Kondensatordruck p_2 austretenden

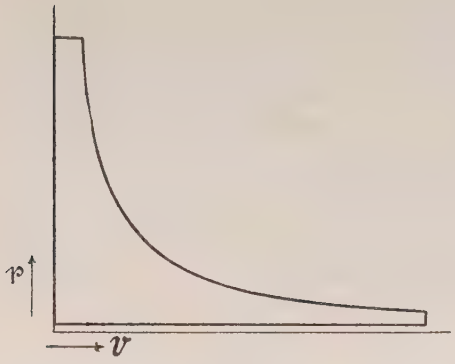


Fig. 34.

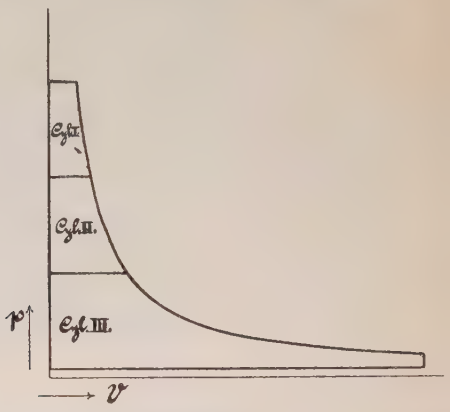


Fig. 35.

Dampf hervorgerufen wird, dadurch zu verringern, dass man das ganze Temperatur- bezw. Druckgefälle in mehrere Teile teilt, von denen jeder in einem besonderen Cylinder ausgenützt wird, wie dies schematisch durch die Fig. 34 und 35 dargestellt ist. Natürlich sind durch das not-

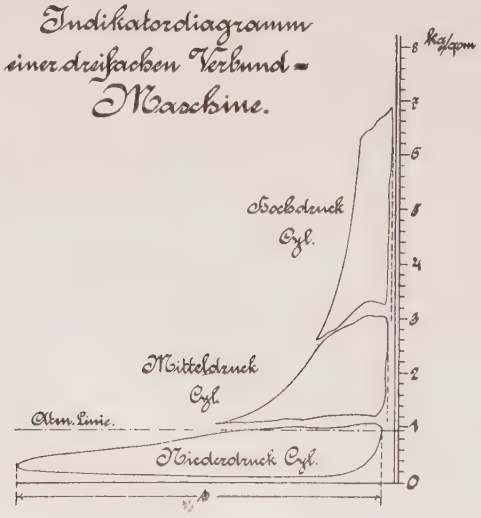


Fig. 36.

wendige Hinüberschieben des Dampfes in den jeweils folgenden Cylinder Verluste an Spannung unvermeidlich, die in Fig. 36 durch die Zwischenräume zwischen den Einzeldiagrammen dieser Figur und den

unvollkommenen gegenseitigen Anschluss derselben dargestellt werden, aber die Erfahrung hat längst gezeigt, dass die Vorteile überwiegen. Fig. 36 zeigt auch, dass man in Wirklichkeit nicht, wie es in der schematischen Fig. 35 geschehen, die gesamte Druckdifferenz, sondern etwa die gesamte Arbeitsleistung, d. h. die Diagrammfläche in drei gleiche Teile zerlegt und gleichförmig auf die drei Kolben verteilt.

Wenn man den Dampf von T_1 auf T' *überhitzen* will, so kann dies praktisch nur so geschehen, dass man ihm auf dem Wege vom Kessel zur Maschine pro 1 kg bei konstantem Druck p_1 die Wärme zuführt

$$\gamma_p(T' - T_1);$$

im Arbeitsprozess ändert sich dann bei der Idealmaschine nur die Wärmezufuhrperiode, die jetzt aus zwei Teilen, einem isothermischen (wie bei gesättigtem Dampf) und einem bei konstantem Druck aber steigender Temperatur erfolgenden, besteht; das Diagramm des vollkommenen Prozesses sieht dann so aus wie die Fig. 37 und 38 zeigen.

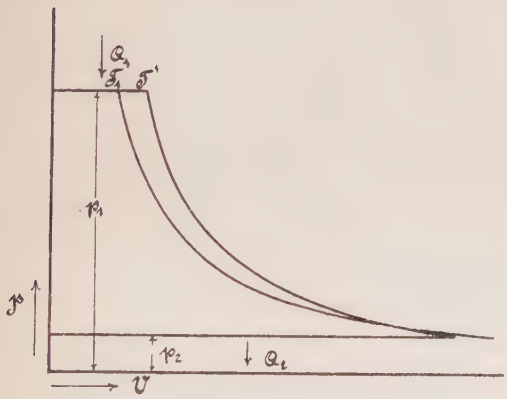


Fig. 37.

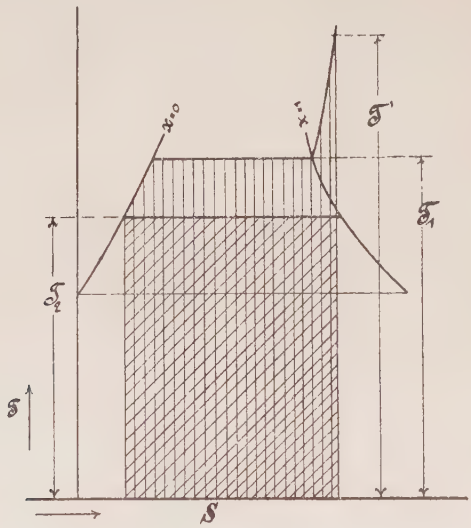


Fig. 38.

Der Gewinn ist für den *verlustlosen Prozess* äusserst gering; man erhält z. B. für

$p_1 = 10$ kg/qcm	$p_2 = 0{,}1$ kg/qcm	$T' = 300 + 273 = 573$
η ohne Überhitzung		0,266
η mit „		0,277

in *Wirklichkeit* aber reduziert die Überhitzung des Dampfes den Wärmeaustausch mit den Wandungen (wegen der geringen Wärmeleitungsfähigkeit des überhitzten Dampfes) erheblich, sodass der thatsächliche Vorteil den theoretischen weit übertrifft.

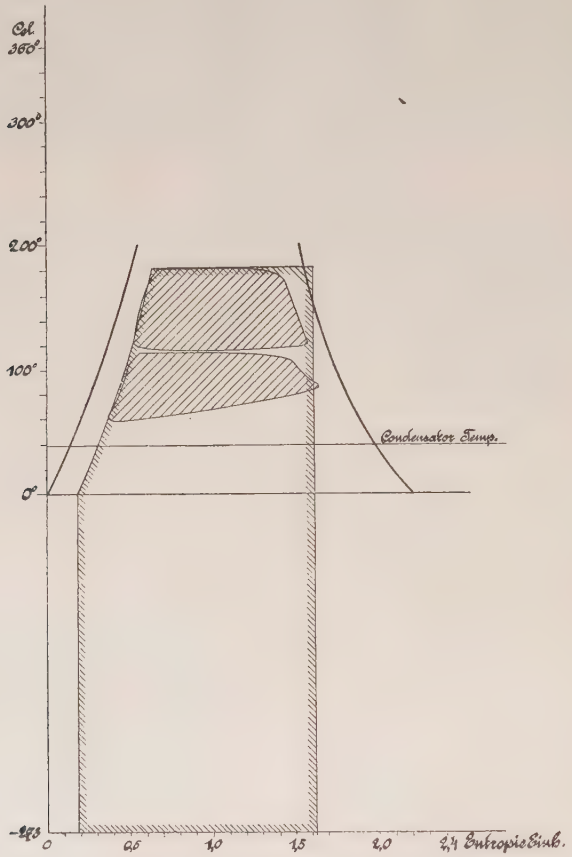


Fig. 39.

In den Figuren 39, 40 und 41 sind die Wärmediagramme einer zweicylindrigen Verbundmaschine unter drei verschiedenen Betriebsverhältnissen dargestellt.

Fig. 39 bezieht sich auf gesättigten Dampf, die beiden andern Figuren auf schwach und stark überhitzten Dampf. Der Flächeninhalt der ganz schraffierten Diagramme stellt die Wärmeäquivalente der in den beiden Cylindern geleisteten Arbeiten dar; die gesamte zugeführte Wärme ist durch den Flächeninhalt der umränderten Konturen dargestellt. Man erhält also den Wirkungsgrad des Arbeits-

prozesses jeweilig als Quotient der erstgenannten dividiert durch die letztgenannten Flächen. In den Figuren 39 bis 41 ist auch die Kondensatortemperatur eingezeichnet; da diese die Fläche des Wärmeäquivalentes der Arbeit bei dem Prozess einer vollkommenen Dampf-

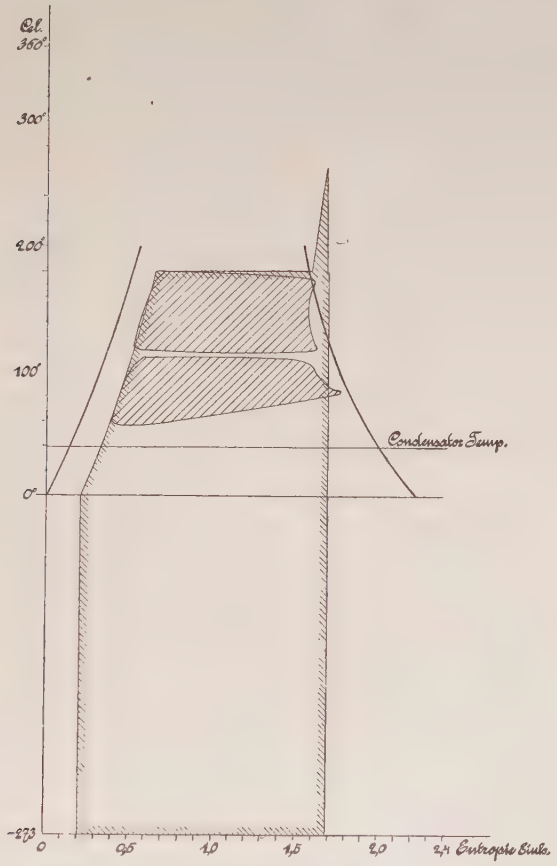


Fig. 40.

maschine nach unten hin abgrenzt, so giebt unsere Darstellung auch darüber Aufschluss, wie weit die ausgeführte Maschine sich dem Idealprozess nähert[24]).

12. Der Gesamt- oder wirtschaftliche Wirkungsgrad der Dampfmaschine. Vom technischen Standpunkt aus genügen die bis-

24) Wegen aller Einzelheiten, in welche hier nicht eingetreten werden kann, vgl. *M. Schröter* und *A. Koob*, Untersuchung einer von *Van den Kerchove* in Gent gebauten Tandemmaschine, Z. d. Vereins Deutscher Ingenieure 47 (1903), p. 1281, 1405, 1488.

herigen Betrachtungen über den Prozess der Dampfmaschine allerdings noch nicht zur erschöpfenden Beurteilung derselben — die Erzeugung der Wärme aus dem Brennmaterial und der Übergang von der im Cylinder geleisteten zu der effektiv abgegebenen Arbeit fehlen

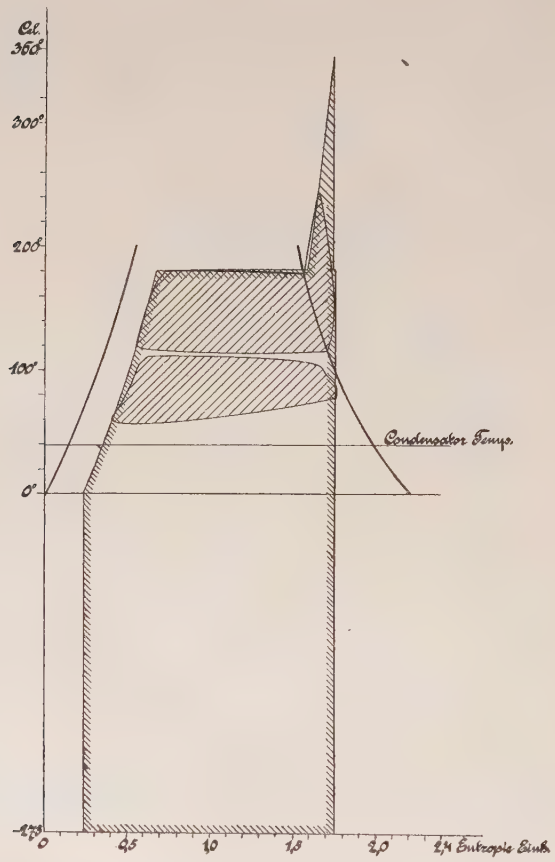


Fig. 41.

noch zur Charakterisierung der technischen Wirtschaftlichkeit der Umwandlung der chemischen Energie der Kohle in die Form der an der Dampfmaschinenwelle abgegebenen mechanischen Arbeit. Nur der Vollständigkeit halber sei angeführt, dass durch Aufstellung des wirtschaftlichen Wirkungsgrades η als Produkt von drei Einzelwirkungsgraden η_1, η_2, η_3 die Technik diesem Umstand Rechnung trägt, indem man setzt:

$$\eta_1 = \frac{Q_1}{H} = \frac{\text{dem arbeitenden Körper zugeführte Wärme}}{\text{absoluter Heizwert des dafür verbrauchten Brennmaterials}}$$
$$= \text{Wirkungsgrad der Erzeugung und Übertragung der Wärme,}$$

$$\eta_2 = \frac{AW_i}{Q_1} = \frac{\text{Äquivalent der indizierten Arbeit}}{\text{dem arbeitenden Körper zugeführte Wärme}} =$$
$$= \text{Wirkungsgrad des thermodynamischen Prozesses im Cylinder,}$$

$$\eta_3 = \frac{AW_e}{AW_i} = \frac{\text{Äquivalent der effektiven Arbeit an der Welle}}{\text{Äquivalent der indizierten Arbeit im Cylinder}}$$
$$= \text{Wirkungsgrad der mechanischen Einrichtung.}$$

Somit $\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 = \frac{AW_e}{H}$.

Massgebend ist allerdings von den drei Faktoren η_1, η_2, η_3 der in den vorangehenden Nummern betrachtete Wirkungsgrad η_2; denn die beiden andern erreichen als idealen Grenzwert die Einheit und in Wirklichkeit bei guten Ausführungen Werte bis 0,80 bezw. 0,93, während η_2 seine obere Grenze in dem Wirkungsgrad des *Rankine-Clausius*-Prozesses findet.

Was den Wirkungsgrad η_1 betrifft, so bleibt es fraglich, ob man bei seiner Definition als disponible Wärme einfach den absoluten Heizwert des Brennmateriales oder vielleicht eine daraus abgeleitete Grösse (nach *Zeuner* den „Arbeitswert der Brennstoffe") anzusehen hat[25]).

13. Die Verbrennungsmotoren (Gasmaschine, Dieselmotor) als zweite Klasse der thermodynamischen Kraftmaschinen unterscheiden sich von den Dampfmaschinen vor allem dadurch, dass es durch Verwendung von gasförmigem oder flüssigem (entsprechend fein verteiltem) Brennmaterial möglich ist, *den Prozess der Wärmeerzeugung in den Arbeitscylinder hinein* zu verlegen, die Wärmeübertragung an den arbeitenden Körper (das Gemisch aus Verbrennungsprodukten und überschüssiger Luft) also *ohne Zuhilfenahme von Heizflächen* direkt auszuführen und die dabei entstehenden hohen Temperaturen (bis 1800° C. und darüber) für den Dauerbetrieb dadurch unschädlich zu machen, dass die Cylinderwandungen von aussen durch Kühlwasser auf beliebig niedriger Temperatur erhalten werden. Der weitaus verbreitetste Arbeitsvorgang zur Realisierung eines solchen Prozesses besteht in dem sogenannten *Viertaktverfahren*, nach welchem bei seiner ursprünglichen Ausführung ein auf der Vorderseite offener, stets mit der Atmosphäre in Verbindung stehender Cylinder benutzt wird, dessen Kolben auf der Hinterseite die folgenden vier Phasen des Prozesses vollzieht:

25) S. *Zeuner*, Techn. Thermodynamik 1, § 77.

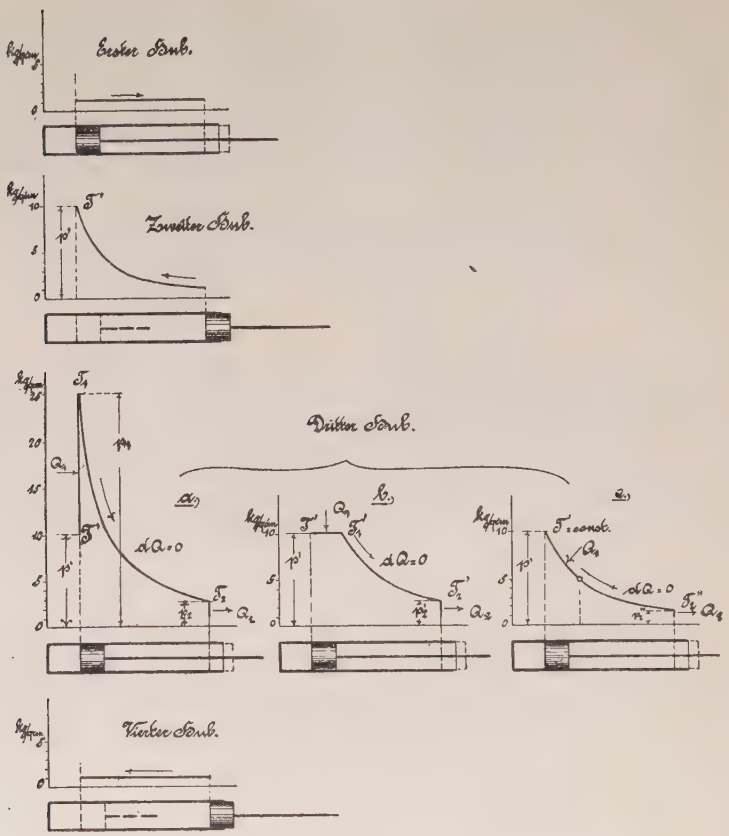


Fig. 42.

Beim ersten Hub wird das Verbrennungsgemisch in den Cylinder bei atmosphärischem Druck und atmosphärischer Temperatur, p_0 und T_0, eingeführt, beim zweiten Hub wird dasselbe verdichtet, im Idealfall adiabatisch auf p' und T. Die Wärmezufuhr kann nunmehr auf drei verschiedene Arten geschehen: entweder im Totpunkt, *bei konstantem Volumen* mit Druck- und Temperatursteigung auf p_1 und T_1 (Diagramm a) und nachfolgender adiabatischer Expansion auf p_2 und T_2; oder bei *konstantem Druck* p' mit Temperaturerhöhung auf T_1' (Diagramm b) und nachfolgender Expansion auf T_2' und p_2', oder endlich (Diagramm c) *bei konstanter Temperatur* T_1 mit sinkendem Druck und nachheriger adiabatischer Expansion auf T_2'' und p_2''. Prozess a) ist der Idealprozess der sogenannten *Otto*'schen Gasmaschine, b) derjenige des *Diesel*motors, c) wird praktisch nicht benutzt. Der vierte Hub dient dem Ausstossen der Verbrennungsgase in die Atmosphäre.

Die Arbeit des ersten und vierten Hubes lässt sich auch durch besonders angebrachte Lade- und Ausspülpumpen ersetzen; dadurch wird es ermöglicht, den Arbeitscylinder, der nunmehr den zweiten und dritten Hub zu verrichten hat, im *Zweitakt* arbeiten zu lassen (System *v. Öchelhäuser, Körting* u. a.). Da der Lade- und Ausspülhub thermodynamisch keine Rolle spielt, ist weiterhin eine gemeinsame Betrachtung von Zweitakt- und Viertakt-Verfahren zulässig.

Wie ersichtlich, besteht gegenüber dem Arbeitsprozess der Dampfmaschine noch der weitere, fundamentale Unterschied, dass der arbeitende Körper nicht wirklich einen Kreisprozess mit Rückkehr in den Anfangszustand ausführt, sondern dass derselbe durch den chemischen Prozess der Verbrennung seine Natur insofern ändert, als damit eine Änderung des spezifischen Volumens verbunden ist. Ausserdem muss bei jedem Spiel eine neue Menge eines Körpers eingeführt werden, der von dem den Prozess verlassenden verschieden ist.

Es genügt jedoch *für die Zwecke der Technik zunächst* noch[26]) diese an und für sich nicht bedeutenden Unterschiede zu vernachlässigen und den Idealprozess so aufzustellen, als ob es sich nur um *Erwärmung der Luft in einem geschlossenen umkehrbaren Kreisprozess handeln würde* — die beschriebenen drei Prozesse bilden sich dann im *TS*-System ab wie Fig. 43 zeigt. Dieselbe ist so gezeichnet, dass für die Fälle a) und b) die gleiche zugeführte Wärmemenge ins Spiel kommt; man sieht auf den ersten Blick, dass der Prozess a) den besten, c) den niedrigsten Wirkungsgrad liefert und dass der *Carnot*'sche Prozess hier *überhaupt nicht in Frage kommen kann*, weil derselbe bei der ihm entsprechenden Forderung, die höchste Temperatur durch adiabatische Kompression zu erreichen, auf enorme Pressungen führt, welche niemals realisierbar sind.

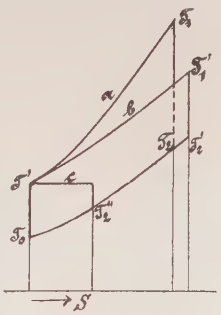


Fig. 43.

Bei den mit Gemischen aus Luft und Gas arbeitenden Motoren, welche das zur Verbrennung fertig bereitete Gemenge ansaugen und komprimieren, bildet für den Kompressionsdruck diejenige Pressung, bei welcher Gefahr der Selbstentzündung des Gemenges vor Erreichung

26) Eingehende Würdigung finden die thatsächlichen Verhältnisse in der Arbeit von *A. Stodola,* Die Kreisprozesse der Gasmaschinen, Z. d. Vereins Deutscher Ingenieure 1899 und bei *A. Fliegner*, Thermodynamische Maschinen ohne Kreisprozess, Vierteljahrsschrift d. naturforsch. Gesellschaft, Zürich 1901.

des Totpunktes vorliegt, eine unüberschreitbare Grenze — für diese ist also der Prozess a) als Idealprozess anzusehen, wenn man die Verhältnisse so wählt, dass p_1 keine unzulässige Höhe erreicht.

Derselbe ist in Fig. 44 und 45 noch einmal besonders dargestellt und zwar sowohl für den Fall der vollständigen Expansion auf atmosphärischen Druck (ausgezogen), als auch für die Arbeitsweise im Viertakt (punktiert).

Kann man aber, wie dies beim *Diesel*-Motor, der mit flüssigem Brennstoff arbeitet, der Fall ist, Luft und Brennstoff während der Kompression *getrennt* halten, dann liefert der Prozess b) das Maximum des Wirkungsgrades, indem man die adiabatische Kompression bis auf den höchsten zulässigen Druck treibt.

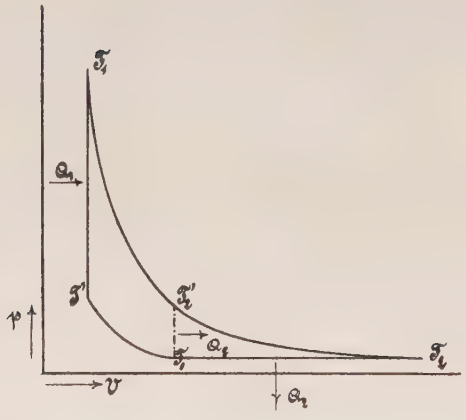


Fig. 44.

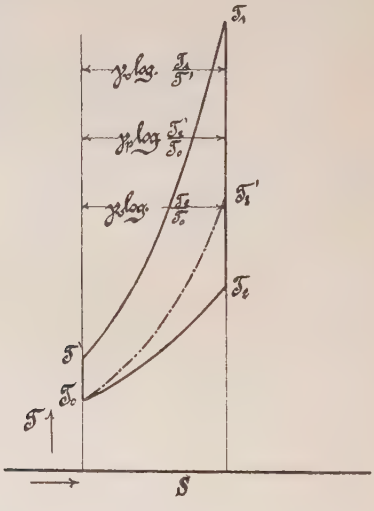


Fig. 45.

In Figur 46 und 47 ist derselbe sowohl im Spannungs- als im Wärmediagramm noch besonders dargestellt und zwar gilt auch hier das zu Fig. 44 und 45 Gesagte, sodass die ausgezogene Linie der vollständigen Expansion, die punktierte dem Viertakt entspricht.

Aus den Wärmediagrammen des Idealprozesses erkennt man augenfällig, welch entscheidende Bedeutung unter den für denselben gemachten Voraussetzungen (s. oben) für die Beurteilung der Verbrennungsmotoren dem Wert der spezifischen Wärme (γ_v und γ_p) zukommt. Ist dieselbe konstant, so sind die Kurven der Wärmezufuhr und Wärmeentziehung bei konstantem Volumen oder Druck solche mit konstanter Subtangente; nimmt dagegen die spezifische Wärme, wie vielfach angenommen wird, mit der Temperatur zu, so sind jene

Kurven (wegen Zunahme der Subtangente) unter immer kleiner werdenden Winkeln gegen die Abscissenaxe geneigt, d. h. bei der Wärmezufuhr bei konstantem Volumen oder konstantem Druck erreicht man bei gleicher Wärmemenge nicht so hohe Temperaturen und bei der Wärmeentziehung fallen letztere langsamer — auch die Endtemperaturen adiabatischer Zustandsänderungen werden beeinflusst: kurz, das ganze Bild des Idealprozesses verschiebt sich gegenüber der Annahme konstanter spezifischer Wärme. Die bezüglichen Verhältnisse sind aber noch nicht genügend geklärt[27]).

Obwohl kein *Carnot*'scher Prozess, so ist doch der Idealprozess des Verbrennungsmotors demjenigen der Dampfmaschine an Wirkungs-

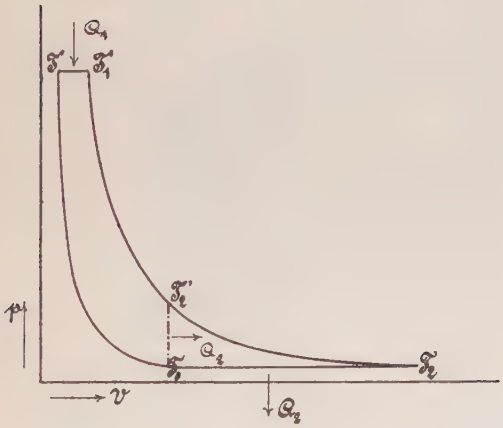


Fig. 46.

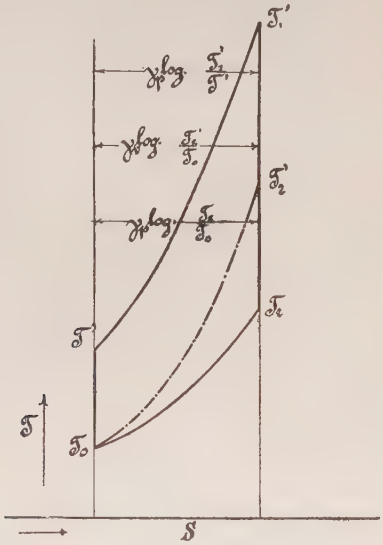


Fig. 47.

grad meist überlegen; letzterer beträgt bei Begrenzung des Diagrammes durch zwei Kurven konstanten Volumens oder zwei Kurven konstanten Druckes unter Annahme konstanter spezifischer Wärmen und einer bei der Verbrennung unveränderlichen Gaskonstanten B

$$\eta = \frac{T' - T_0}{T'},$$

ist also gleich dem eines Carnotprozesses zwischen Anfangs- und Endtemperatur der *Kompression*. Diese Überlegenheit zeigt sich auch bei

27) S. z. B. *E. Meyer*, Untersuchungen am Gasmotor, Z. d. Vereins Deutscher Ingenieure, 1902, p. 1303.

den ausgeführten Verbrennungsmotoren, weil deren Annäherung an ihren Idealprozess ungefähr die gleiche ist wie bei der Dampfmaschine.

Thatsächlich steht der *Diesel*-Motor heute in bezug auf Wirkungsgrad an der Spitze aller Wärmekraftmaschinen, im günstigsten Falle hat man $\eta = 0{,}40$, also das Doppelte der Dampfmaschinen erreicht. Die Praxis darf sich natürlich mit dieser thermodynamischen Vergleichung nicht begnügen, sondern muß eine ökonomische Vergleichung durchführen. Nach letzterer verdient der Dieselmotor nur in solchen Gegenden vor der Dampfmaschine den Vorzug, wo eine aus Petroleum gewonnene Wärmeeinheit billiger ist als zwei aus Kohle gewonnene Wärmeeinheiten.

14. Kältemaschinen. Die Umkehrung des arbeitliefernden thermodynamischen Prozesses liefert den arbeitkonsumierenden Prozess der Kältemaschine, deren Aufgabe darin besteht, die Temperatur gegebener Körper auf tiefere Wärmegrade zu bringen (oder auf solchen dauernd

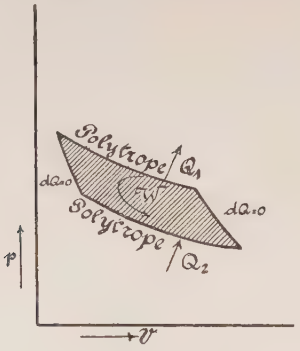


Fig. 48.

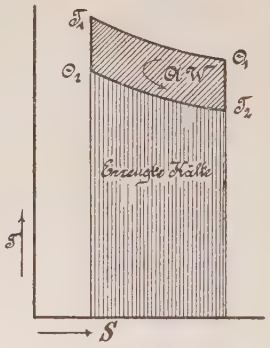


Fig. 49.

zu erhalten) als sie in der Umgebung sich vorfinden[28]). Die Umkehrung des *Lorenz*'schen Diagrammes ergibt auch hier den allgemeinsten Fall; während bei der Wärmekraftmaschine aber die polytropischen Kurven möglichst weit auseinander liegen sollen, siehe Fig. 26 und 27, handelt es sich hier darum, dieselben einander *möglichst nahe* zu bringen, einer *möglichst kleinen* zu leistenden Arbeit entsprechend, siehe Fig. 48 und 49; dieselbe Zerlegung eines beliebigen Kreisprozesses in Elementarprozesse wie sie in Fig. 21, 22 ausgeführt wurde, ergibt für Kältemaschinen die Grundregel: *Das Maximum der Ökonomie tritt ein, wenn der arbeitende Körper zur Aufnahme von Wärme (Kälte-*

28) *S. Luegers* Lexikon der gesamten Technik, 5. Artikel: Kältemaschinen von *C. v. Linde*; ferner *H. Lorenz*, Neuere Kühlmaschinen, 3. Aufl., München, Oldenbourg.

erzeugung) an keiner Stelle des Prozesses auf tiefere Temperaturen, bezw. zur Wärmeabgabe (an das Kühlwasser) niemals auf höhere Temperaturen gebracht wird, als sie durch die der Kältemaschine gestellte Aufgabe bedingt sind.

Auch bei dem umgekehrten Prozess kann, wie bei dem direkten entweder ein verdampfender Körper oder atmosphärische Luft als arbeitender Körper Verwendung finden — ersteres entspricht den *Kaltdampfmaschinen*, letzteres den *Kaltluftmaschinen*. Bei ersteren, den technisch weitaus wichtigsten, ist der Prozess der verlustlosen Maschine wieder, wie bei den Dampfmaschinen, soweit er im Sättigungsgebiet verläuft, ein *Carnot*'scher; häufig greift er etwas in's Überhitzungsgebiet über.

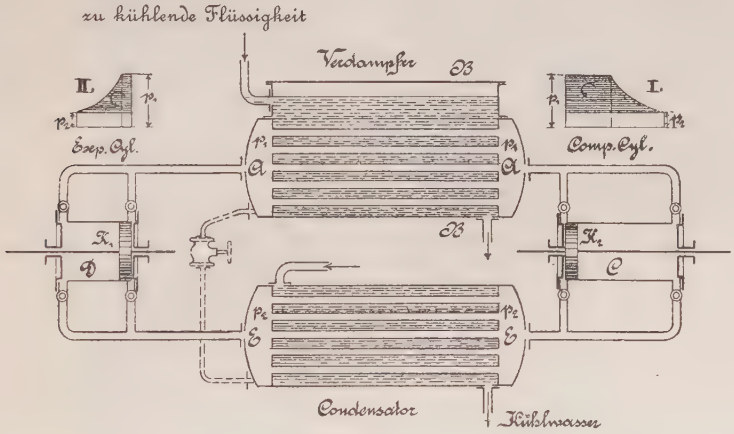


Fig. 50.

Die Flüssigkeiten, welche sich für den Kältemaschinenprozess als arbeitende Körper eignen, sind Ammoniak (NH_3), schweflige Säure (SO_2), Kohlensäure (CO_2) u. s. f.; ihre Natur und Eigenschaften bringen es mit sich, dass man hier den Prozess als einen wirklich geschlossenen, mit fortwährender Zirkulation einer und derselben Füllung der Maschine ausführen muss. Die ideale Anordnung (Fig. 50) entspricht vollkommen der Umkehrung von Fig. 30 und, wie dort die wirklich ausgeführte Dampfmaschine durch Weglassung des Kompressionscylinders charakterisiert war, so entsteht hier die wirklich ausgeführte Kältemaschine aus der idealen durch Weglassung des Expansionscylinders, an dessen Stelle das sog. Regulierventil tritt, ein Drosselventil, durch welches der Übergang der Flüssigkeit aus dem Kondensator *E—E* nach dem Verdampfer *A—A* geregelt wird.

Fig. 51 stellt ein Idealdiagramm der Maschine mit Expansionscylinder, Fig. 52 das einer Maschine mit Drosselventil dar (für

Ammoniak als arbeitenden Körper). Der Drosselungsvorgang wird als ohne Wärmemitteilung vor sich gehend betrachtet und vollzieht sich dann als Zustand konstanter Erzeugungswärme: $i = u + Apv = \text{const.}$ (vgl. hierüber Nr. **22**).

In Fig. 51 und 52 bedeuten die weitschraffierten Flächen die Kälteleistungen, d. h. die der zu kühlenden Substanz entzogenen Wärmemengen Q_2, die engschraffierten Teile die Wärmeäquivalente der aufzuwendenden Arbeiten W; die in Fig. 52 angewandte Darstellung

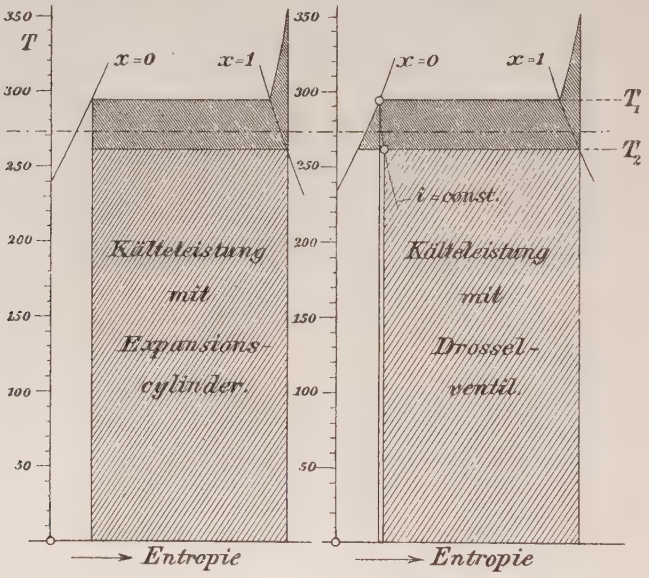


Fig. 51. Fig. 52.

des nicht umkehrbaren Drosselungsvorgangs ist nach der in Nr. **16** auseinandergesetzten Art erfolgt; die in Wärme zurückverwandelte Arbeit ist dabei durch das Dreieck zwischen den Linien $x = 0$, $i = \text{const.}$ und $T = T_2$ dargestellt.

Der Wirkungsgrad der Kältemaschine (vgl. Nr. 8) ist durch die Flächen für Q_2 und W mit gegeben; er ist

$$\eta = \frac{Q_2}{AW}.$$

Man kann wohl sagen, dass die Kältemaschine von heute im Prinzip nicht mehr verbesserungsfähig ist — sie verdankt dies dem Umstand, dass ihre Konstruktion von Anfang an (durch *C. v. Linde*) auf die Grundsätze der Thermodynamik aufgebaut wurde.

(Abgeschlossen im Dezember 1904.)

b) Strömende Bewegung der Gase und Dämpfe. Von L. Prandtl.

Vorbemerkung. Die *Bezeichnung der Formelgrössen* ist gemäss der Zusammenstellung von p. 235 gewählt. Folgende Grössen kommen neu hinzu:

Zeichen	Benennung	Dimension
w	Geschwindigkeit	$\frac{\text{m}}{\text{sec}}$
a	Schallgeschwindigkeit	$\frac{\text{m}}{\text{sec}}$
g	Erdbeschleunigung	$= 9{,}81\ \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$
$\varrho = \frac{1}{gv}$	Dichtigkeit, Masse der Volumeinheit	$\frac{\text{kg sec}^2}{\text{m}^4}$
G	Sekundliche Gewichtsmenge, „Ausflussgewicht“	$\frac{\text{kg}}{\text{sec}}$
F	Strömungsquerschnitt	m^2
α	Kontraktionsziffer	unbenannt
μ	Ausflussziffer	„
z	Widerstandsarbeit pro 1 kg Flüssigkeit, „Widerstandshöhe“	m
ζ, ζ_1	Widerstandskoeffizienten	unbenannt, $\frac{1}{\text{m}}$.

Masseinheiten. Als Masssystem ist ebenso wie in dem ersten Teil des Artikels das „technische“ benutzt, d. h. jenes, in dem Länge, Zeit und Kraft die Fundamentaleinheiten sind. Es bedeuten hiermit also die Grössen u, v die innere Energie und das Volumen der *Gewichts*einheit. Die Formeln sind fast durchgängig in den Dimensionen homogen, wo nicht, sind als Einheiten das Meter, die Sekunde und das Kilogramm gewählt; die Wärmemengen sind in der Regel im Arbeitsmass gemessen, d. h. das Wärmeäquivalent A ist $= 1$ gesetzt (vgl. V 3, 2, *Bryan*); nur in den für den numerischen Gebrauch bestimmten Formeln ist das Wärmeäquivalent besonders bezeichnet.

Abkürzungen in den Zitaten:

Zeuner, Therm. = Technische Thermodynamik, 1. und 2. Aufl. (Leipzig 1887, 1900).

Grashof, Masch.-L. = Theoretische Maschinenlehre (Leipzig 1875).

Stodola, Dampfturb. = Die Dampfturbinen, 3. Aufl. (Berlin 1905); (in Klammern sind die §§ der 1. Aufl. beigefügt).

Forschungsarb. = Mitteilungen über Forschungsarbeiten auf dem Gebiete des Ingenieurwesens (herausgeg. vom Ver. deutscher Ing., Berlin).

Anmerkung. Eine Darstellung der geschichtlichen Entwicklung des Gebietes findet sich in Nr. 18.

---

15. Abgrenzung des Stoffes. Die Bewegungserscheinungen der Gase zeigen, so lange die Geschwindigkeiten und die Druckdifferenzen in mässigen Grenzen bleiben, wesentlich dasselbe Gepräge, wie die der volumenbeständigen Flüssigkeiten[29]), deren Theorie im Band IV dieser Encyklopädie in den Artikeln 15 und 16 (Hydrodynamik) von *Love*, und 20 (Hydraulik) von *Forchheimer* behandelt ist. Handelt es sich indes um grosse Druckdifferenzen und Geschwindigkeiten[30]), so ist die Veränderlichkeit des Volumens von grossem Einfluss auf die Bewegungserscheinungen. Der Umstand, dass diese Druck- und Volumen-Änderungen nur im Zusammenhalt mit den thermischen Vorgängen in dem Gase oder Dampfe richtig beurteilt werden können, gab die Veranlassung dazu, diesen Abschnitt in Band V in die Wärmetheorie einzuordnen, während derjenige Teil, der sich mit den mässigen Geschwindigkeiten befasst, die sogenannte Aërodynamik, sich als Artikel 17 von *Finsterwalder* in Band IV bei den hydrodynamischen Abhandlungen befindet.

Viele von den hier behandelten Aufgaben gehen in der Problemstellung, wie in der Art der Behandlung völlig parallel mit entsprechenden Aufgaben der Hydraulik. An derartigen Stellen des Textes finden sich Hinweise auf die entsprechenden Abschnitte des Artikels von *Forchheimer*.

Mit Ausnahme von Nr. 22 beziehen sich die nachstehend zu behandelnden Aufgaben nur auf *stationäre* Bewegungen; die Ergebnisse sind indes ohne grossen Fehler auch für langsam veränderliche Bewegungen verwendbar[31]), wie sie sich z. B. beim Ausströmen aus einem Gefäss mit einer nicht zu grossen Öffnung ergeben.

---

29) Zur Illustration dieser Bemerkung sei erwähnt, dass für Luft zur Erzeugung einer Geschwindigkeit von 40 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ eine Druckdifferenz von 1% des absoluten Druckes genügt; die entsprechende Dichtigkeitsdifferenz ist dann (unter Zugrundelegung der Adiabate) 0,7 %. Rechnet man statt mit der veränderlichen Dichte mit einer mittleren konstanten Dichte, so wird bei der obigen, etwa einem starken Sturme entsprechenden Geschwindigkeit dieser Fehler gegenüber anderen, schwerer zu berücksichtigenden Einflüssen ganz bedeutungslos.

30) Eine Geschwindigkeit oder Druckdifferenz kann als gross oder klein angesehen werden, je nachdem sie im Vergleich mit der Schallgeschwindigkeit bezw. mit dem absoluten Druck in Betracht kommt oder nicht.

31) Als langsam veränderlich kann eine Bewegung so lange gelten, als $\frac{\partial w}{\partial t}$

Die *Helmholtz*'schen Wirbelgesetze[32]), insbesondere der Satz, dass eine anfänglich ruhende Flüssigkeitsmasse sich dauernd wirbelfrei bewegt, sind unter Annahme der Reibungslosigkeit auch auf Gase anwendbar; ausgenommen sind allerdings diejenigen Bewegungsformen, bei denen endliche Drucksprünge[33]) auftreten. Diese Überlegung ist von Nutzen, wenn man sich Rechenschaft darüber ablegen will, in wie weit man berechtigt ist, die Aufgaben über Gasströmung — wie das bisher durchaus üblich war — als eindimensionale Probleme zu behandeln[34]). Man kann die Sache so auffassen, dass man aus der ganzen Strömung *einen* „Stromfaden", etwa den mittelsten, willkürlich zur Behandlung herausgreift, und hernach Druck und Geschwindigkeit für die korrespondierenden (im selben „Querschnitt" gelegenen) Punkte der übrigen Stromfäden gleich den gefundenen Werten setzt. Für ein Rohr von veränderlichem Querschnitt enthalten die hierdurch begangenen Vernachlässigungen bei Wirbelfreiheit die Krümmung der Rohrwand in der Strömungsrichtung in der ersten Potenz, die Neigung der Rohrwand gegen die Achse in der zweiten Potenz. Bei den turbulenten Bewegungen[35]), die bei längeren Rohren die Regel bilden, ist man von vornherein zur Einführung von Mittelwerten gezwungen, so dass man hier von selbst auf das eindimensionale Problem geführt wird.

16. Allgemeine Theorie der stationären Strömungen. — *Problemstellung.* Eine zusammendrückbare („elastische") Flüssigkeit sei in stationärer Bewegung begriffen. Untersucht wird der Bewegungszustand eines mittleren Stromfadens, der als Repräsentant für alle übrigen Stromfäden betrachtet wird. Es soll, unter Berücksichtigung der Wirkung von äusseren Kräften, von Strömungswiderständen und Wärmemitteilung durch die Wandungen, das Verhalten von Druck, Volumen und Geschwindigkeit in der strömenden Flüssigkeit untersucht werden, unter der Voraussetzung, dass für irgend einen Querschnitt diese Grössen (p, v, w) gegeben sind. Die thermodynamischen Eigenschaften der Flüssigkeit werden dabei als gegeben vorausgesetzt, ebenso die — meist durch feste Wände gebildete — Begrenzung des Flüssigkeitsstromes.

---

gegen $w\frac{\partial w}{\partial x}$ u. s. w. und $gv\frac{\partial p}{\partial x}$ u. s. w. (Euler'sche Gleichungen IV 15, 8) nicht in Betracht kommt.

32) IV 16, **3**, auch **2**, (*Love*).

33) Vgl. Nr. **20** u. IV 19, **11** (*Zemplén*).

34) Diese Behandlungsart ist auch hier in Nr. **16**—**20** festgehalten.

35) IV 15, **17** (*Love*).

Zur Behandlung des vorstehenden Problems dienen die im Folgenden zu gewinnenden Gleichungen.

Im stationären Strömungszustand muss durch jeden Querschnitt des Stromes in der Zeiteinheit dasselbe Flüssigkeitsgewicht G hindurchtreten; es muss also sein:

(a) $$\frac{F \cdot w}{v} = G = \text{const.}$$

(*kinematische* oder Kontinuitäts-Gleichung).

Die Aussage, dass jedes Massenelement in der Bewegungsrichtung nach Massgabe der dort wirkenden äusseren Kräfte beschleunigt wird, führt zu der *mechanischen Gleichung*:

(b) $$\frac{w\,dw}{g} + v\,dp + dh + dz = 0.$$

Hierin bedeutet dh eine der Schwererichtung entgegengesetzte, also nach oben positive Höhenveränderung, dz einen durch Reibung u. dgl. verursachten Bewegungswiderstand, gemessen durch die sog. Widerstandshöhe. Die einzelnen Terme der Gl. (b), wie auch der folgenden Gleichungen stellen Energieänderungen (Arbeiten) pro Gewichtseinheit des Gases vor.

Als dritte Gleichung hat man die Aussage, welche der erste Hauptsatz der Thermodynamik (Gl. 3, p. 243) für den Zustand im Innern des Massenelements liefert. Zu beachten ist dabei, dass die Widerstandsarbeit dz in Gl. (b) hier als zugeführte Wärme neben der von aussen zugeführten Wärme dq wieder auftritt. Die *Wärmegleichung* lautet also:

(c) $$dq + dz = du + p\,dv.$$

Durch Verbindung von Gl. (c) mit (b) erhält man die Gleichung

$$du + d(pv) + \frac{w\,dw}{g} + dh = dq,$$

die integrabel ist und in dieser Form:

(d) $$u + pv + \frac{w^2}{2g} + h = \text{const.} + q$$

als *Gleichung der Gesamtenergie* angesprochen werden darf. (Mit $G = F\frac{w}{v}$ multipliziert, giebt die linke Seite der Gl. den gesamten sekundlichen Energietransport durch den Querschnitt F; Gq ist dabei die bis zum Querschnitt F dem Gas zugeführte Wärme.) Die Widerstandsarbeit z kommt in dieser Gleichung nicht vor, da die verschwundene Arbeit als Wärme in der Gesamtenergie enthalten bleibt.

Durch Einführung der „Erzeugungswärme“ $i = u + pv$ (thermo-

dynam. Potential $\mathfrak{F}_s$ in Art. V 3)[36]) gewinnt Gl. (d) die im folgenden gebrauchte, etwas einfachere Gestalt

$$i + \frac{w^2}{2g} + h = \text{const.} + q.$$

Ist von der strömenden Flüssigkeit das Gesetz der inneren Energie

$$u = f(p, v)$$

bekannt, ferner das Gesetz für den Bewegungswiderstand z und die Wärmemitteilung q, so reichen die Gleichungen (a) bis (d) aus, um für vorgegebene geometrische Verhältnisse der Strömung (Angabe über F und h an jeder Stelle des Stromfadens) die Lösung des Problems völlig bestimmt zu machen, falls ein Anfangszustand (p_0, v_0, w_0) oder äquivalente Daten gegeben sind. Wird die Wärmemitteilung als von Temperaturdifferenzen abhängig dargestellt, so muss zur Festlegung der Temperatur in der strömenden Flüssigkeit noch die „Zustandsgleichung"

$$F(p, v, T) = 0$$

hinzugenommen werden.

Die vorstehende strenge Grundlegung des Problems findet sich — allerdings nicht genau in obiger Fassung, und gleich für permamente Gase spezialisiert — bei *F. Grashof* 1863[37]). Ausführliche Darstellungen finden sich in *Grashof*, Masch.-L. § 75; *Zeuner*, Therm. § 40.

Wirklich durchgeführte Rechnungen mit diesen allgemeinen Voraussetzungen existieren nicht. Die Höhenunterschiede h, die praktisch sehr wenig Bedeutung besitzen, sind durchweg vernachlässigt. Meist bleibt auch die Wärmemitteilung unberücksichtigt. (Eine Lösung mit Wärmeleitung bei Rohrleitungen von konstantem Querschnitt giebt *Grashof*[38]), eine Behandlung des Ausflussproblems *Fliegner*[39])).

Eine graphische Darstellung der in Gl. (b) bis (d) enthaltenen Beziehungen, die sich zuerst bei *Zeuner*[40]) findet, möge in der etwas veränderten Fassung, die ihr *Stodola*[41]) und *Büchner*[42]) gegeben haben, hier Erwähnung finden.

---

36) Vgl. p. 243, Ziff. 5, ferner p. 254 und 260.

37) „Über die Bewegung der Gase im Beharrungszustande in Röhrenleitungen und Kanälen", Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 7 (1863), p. 243, 273, 335.

38) Masch.-L. § 109 u. 115.

39) Civiling. 23 (1877), p. 433.

40) Civiling. 17 (1871), p. 71.

41) Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 47 (1903), p. 1 u. f. = Dampfturb. § 21 u. 22 (§ 2 u. 3).

42) Zur Frage der Laval'schen Turbinendüsen. Diss. Dresden 1903 =

In Fig. 53 soll in einem p-v-Koordinatensystem die Geschwindigkeitserzeugung in einem Gase (oder Dampfe) verfolgt werden, das von dem Zustand p_1, v_1, wo die Geschwindigkeit $w = 0$ ist, beginnend, längs der Kurve 1-2 expandiert. Höhendifferenzen und Wärmemitteilung sollen ausser Betracht bleiben. Gleichung (b) und (d) lauten somit in der Integralform

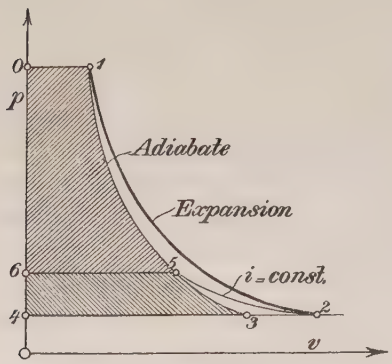


Fig. 53.

$$\text{(b')} \qquad \frac{w^2}{2g} = \int_2^1 v\,dp - z;$$

$$\text{(d')} \qquad \frac{w^2}{2g} = i_1 - i_2.$$

Zieht man durch 1 eine Adiabate bis zum Druck p_2 herab (1-3), so hat man, da diese das Zustandsgesetz bei widerstandsloser Bewegung ist (vgl. den nächsten Abschnitt), in der Fläche 0-1-3-4-0 ein Mass für die verfügbare kinetische Energie:

$$\text{(b'')} \qquad \frac{w'^2}{2g} = \int_3^1 v\,dp.$$

Die wirklich erreichte kinetische Energie ergiebt sich, wenn man durch 2 eine Kurve $i = \text{const.}$ bis zum Schnittpunkt 5 mit der Adiabate legt; nach (d') und (b'') wird sie durch die Fläche 0-1-5-6-0 dargestellt. Somit repräsentiert die Fläche 5-6-4-3-5 den durch die Widerstände verursachten Energieverlust.

Durch Vergleich von (b') mit (b'') findet man, dass die Widerstandsarbeit z durch die Fläche 1-2-4-6-5-1 dargestellt ist; dass diese Fläche um den nicht schraffierten Teil 1-2-3-1 grösser ist als die des Energieverlustes, ist damit zu erklären, dass ein Teil der in Wärme verwandelten Widerstandsarbeit zur weiteren Expansion nutzbringend Verwendung findet.

Eine ähnliche Darstellung lässt sich in Temperatur-Entropiekoordinaten (dem sog. Wärmediagramm) durchführen (Fig. 54). Die Flächen ∞-1-1'-∞ und ∞-2-2'-∞ stellen i_1 und i_2 dar, 1-3 ist die Adiabate, die verfügbare Energie $\frac{w'^2}{2g} = i_1 - i_3$ ist durch ∞-1-3-∞ dargestellt, der Energieverlust durch 1'-3-2-2'-1', die Widerstandsarbeit z durch 1'-1-2-2'-1'.

Forschungsarb. Heft 18, p. 47 u. f.; Auszug Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 48 (1904), p. 1029 u. 1097.

Noch einfacher, aber weniger eindrucksvoll wird die Darstellung im i-s-System (Fig. 55); die Strecke 1-3 stellt die verfügbare, 1-5 die erreichte kinetische Energie, 5-3 den Verlust dar.

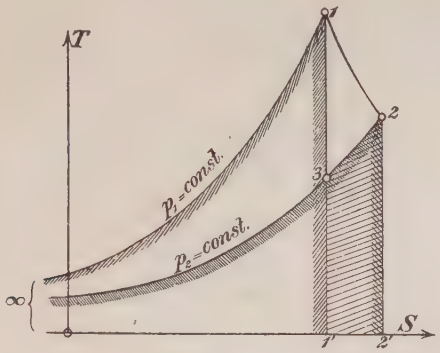


Fig. 54.

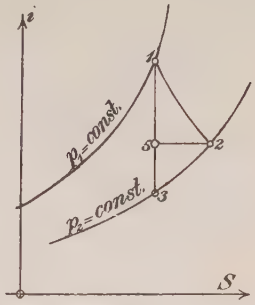


Fig. 55.

Ist am Ende des Strömungsvorgangs die Geschwindigkeit wieder $= 0$, so ist nach (d′) $i_1 = i_2$. Dies ist die Beziehung, welche beim Überströmen mit Vernichtung der Strömungsgeschwindigkeit eintritt (vgl. Nr. 22).

17. Bewegung ohne Widerstände und Wärmemitteilung. Gleichung (c) lautet hier: $du + pdv = 0$; sie liefert mit $u = f(p, v)$ einfach das Gesetz einer adiabatischen Zustandsänderung:

$$v = \varphi(p, p_1, v_1),$$

hiermit wird Gl. (b) integrabel; es wird

$$(b_1) \qquad \frac{w^2 - w_1^2}{2g} = \int_p^{p_1} v\,dp;$$

p_1, v_1, w_1 sind dabei die Werte von p, v und w in einem gegebenen Anfangsquerschnitt. Gleichung (a) ordnet jetzt mit Hilfe der vorstehenden Beziehungen jedem Querschnitt F eine bestimmte Geschwindigkeit und einen bestimmten Druck zu.

Ist p_1 der Druck in dem Raume, von dem die Flüssigkeitsströmung ausgeht, und kann dort $w_1^2 = 0$ gesetzt werden, so wird

$$\frac{w^2}{2g} = \int_p^{p_1} v\,dp.$$

Betrachtet man für diesen Fall den Verlauf des Strömungsquerschnitts $F = \frac{Gv}{w}$, der zu einem bestimmten sekundlichen Gewicht G gehört, als

Funktion von p, so findet man, dass nicht nur für $p = p_1$ (wegen $w = 0$), sondern auch für $p = 0$ (wegen $v = \infty$) $F = \infty$ ist (vgl. Fig. 56). Für das zwischen beiden Grenzen liegende Minimum von F findet man die Bedingung

$$w^2 = -g v^2 \cdot \frac{dp}{dv} = \frac{dp}{d\varrho},$$

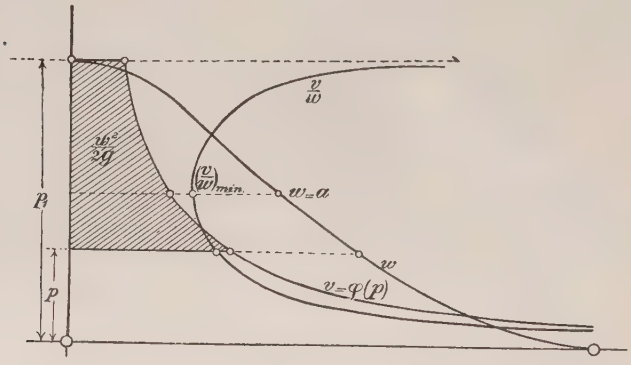


Fig. 56.

wo ϱ die Dichte ist. Diese Gleichung besagt nichts anderes, als dass die Geschwindigkeit im engsten Querschnitt des Stromfadens gleich der dem dortigen Zustande entsprechenden Schallgeschwindigkeit $a = \sqrt{\frac{dp}{d\varrho}}$[43]) ist.

Dieses Ergebnis scheint zuerst von *Hugoniot*[44]) allgemein bewiesen worden zu sein, nachdem es etwas früher *O. Reynolds*[45]) für permanente Gase als zutreffend erkannt hatte.

Der innere Grund dieses eigenartigen Resultates lässt sich etwa folgendermassen einsehen: Eine mässige Druckschwankung irgend welcher Art rollt in einem cylindrischen Rohr mit Schallgeschwindigkeit über die darin befindliche Flüssigkeit hinweg; lässt man die Flüssigkeit mit Schallgeschwindigkeit fliessen, so wird es dadurch möglich, dass die Druckdifferenzen an Ort und Stelle stehen bleiben. Da man den Stromfaden an der engsten Stelle (Stetigkeit von $\frac{dF}{dx}$ vorausgesetzt) als Cylinder ansehen darf, fordern hier die stationären Pressungsunterschiede eine Strömungsgeschwindigkeit gleich der Schallgeschwindigkeit.

Nach dem Vorstehenden giebt es für jeden Querschnitt, der

43) Vgl. Encykl. IV, Art. 24 Akustik, von *Lamb*.
44) Paris C. R. 103 (1886), p. 1178.
45) Phil. Mag. V, 21 (1886), p. 185. = Pap. II, p. 311.

grösser ist, als der engste Querschnitt, je zwei Werte von p und w. Für den Verlauf von p ist dies in Fig. 57 angedeutet (die stark gezeichneten Linien). Welche Kombination der Kurvenzweige in einem bestimmten Fall eintreten wird, richtet sich nach dem Druck an den Enden des Rohres.

Untersucht man für eine fest vorgegebene Röhre die den verschiedenen Strömungsvorgängen mit gleichem p_1 und v_1 entsprechende sekundliche Ausflussmenge G, so zeigt sich als Folgerung aus dem Vorstehenden, dass diese einen Grösstwert erreicht, wenn im engsten Querschnitt Schallgeschwindigkeit eintritt.

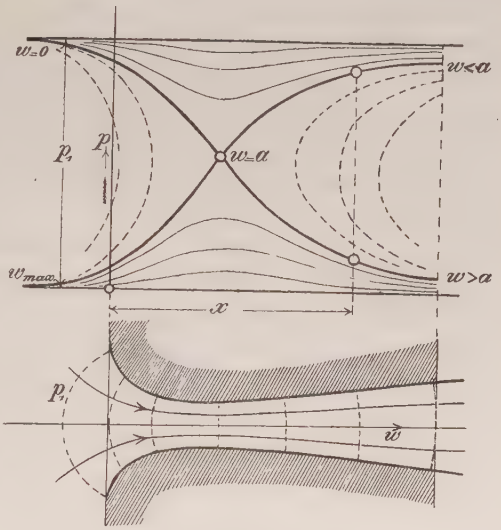


Fig. 57.

Verschiedene Druckverteilungen, die kleineren Werten von G entsprechen, sind in Fig. 57 durch die dünn ausgezogenen Linien dargestellt. Die gestrichelten Linien beziehen sich auf Ausflussmengen grösser als $G_{\max.}$; sie führen nicht von einem Rohrende zum andern, entsprechen daher keiner hier möglichen Strömung.

18. Ausströmen aus Öffnungen und Mundstücken. Die Beantwortung der Frage, welche Luftmenge bei vorgegebener Druckdifferenz pro Zeiteinheit durch eine gegebene Öffnung hindurchtritt, entspricht einem alten Bedürfnis der Technik. Dies ist offenbar der Grund dafür, dass sich die älteren Arbeiten aus dem Gebiete des vorliegenden Referates gerade um diese Frage gruppieren. Es mag also wohl passend erscheinen, an dieses Thema eine Schilderung der historischen Entwicklung der hier auftretenden Gedankenreihen anzuknüpfen.

Die älteste Notiz über den Ausfluss „elastischer Flüssigkeiten" scheint bei *Daniel Bernoulli*[46]) 1738 zu stehen. Er giebt die Anweisung, die Berechnung wie bei einer inkompressiblen Flüsssigkeit vorzunehmen; die Geschwindigkeit sei zu setzen:

46) Hydrodynamica, Strassburg 1738, p. 224.

$$w = \sqrt{2g(p_1 - p_2)v_1};^{48})$$

die Ausflussmenge wird mit $G = F \cdot \frac{w}{v_1}$ berechnet. Diese Berechnungsweise, der die Vorstellung zu Grunde lag, dass die Geschwindigkeit gemäss dem *Torricelli*'schen Theorem einfach durch die im Ausflussgefäss „vorhandene" Druckhöhe $h = v_1(p_1 - p_2)$ erzeugt werde, und dass die Geschwindigkeitserzeugung für jedes Teilchen plötzlich beim Verlassen des Gefässes erfolge, findet sich bei *d'Alembert*[49]) und anderen wieder; sie schien auch durch verschiedene Versuchsreihen[50]), die freilich alle mit kleinen Pressungen angestellt waren, bestätigt zu werden. Erst *Navier*[51]) fand 1829 den richtigen Weg, die unter allmählicher Expansion des Gases stattfindende Geschwindigkeitserteilung mit Hilfe von Differentialbetrachtungen zu berechnen. Er besitzt die Beziehung (b) in ihrer einfachsten Form (vgl. p. 293) und erhält aus ihr mit der Annahme, dass der Druck in der Mündung gleich dem äusseren Druck p_2 ist, unter Voraussetzung des *Mariotte*'schen Gesetzes: $pv = C$ für eine der Fig. 58 entsprechende Mündung

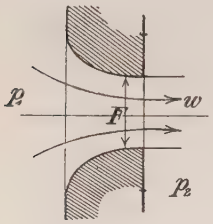


Fig. 58.

$$G = \frac{Fw}{v_2} = \frac{F}{v_2}\sqrt{2gC\log\frac{p_1}{p_2}}.^{52})$$

Er diskutiert die Gleichung nach verschiedenen Richtungen, zeigt auch, dass sie für sehr kleine Pressungsunterschiede in die bei inkompressiblen Flüssigkeiten gebräuchliche übergeht. Er findet auch bereits, dass (für konstantes G) der Querschnitt F als Funktion von p ein Minimum besitzt, zieht aber daraus falsche Schlussfolgerungen. Des

48) Im folgenden bezeichnet der Index 1 immer die Zustände in dem Raume, aus dem die Flüssigkeit ausfliesst; der Index 2 die Zustände in dem Raume, in den sie eintritt.

49) Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides, Paris 1744, p. 165 u. f.

50) Die bemerkenswerteren Arbeiten über Ausflussversuche bei geringem Überdruck sind *G. Schmidt,* Ann. Phys. Chem. (1) 66 (1820), p. 39; *Lagerhjelm,* Stockholm Akad. 1822; Bericht hierüber von *Girard,* Journ. génie civil 1829; *K. L. Koch,* Versuche über die Geschwindigkeit ausströmender Luft, Göttingen 1824; Bericht hierüber von *G. Schmidt,* Ann. Phys. Chem. (2) 2 (1824), p. 39; *Aubuisson,* Ann. des mines 13 (1826), p. 483; *H. Buff,* Ann. Phys. Chem. (2) 37 (1836), p. 277 u. 40 (1837), p. 14; (Neuberechnung der *Koch*'schen Versuche und Bericht über eigene Versuche).

51) Mémoire sur l'écoulement des fluides élastiques, Paris, Mém. de l'Acad. 9 (1830), p. 311.

52) Die sehr verschiedenen Formelbezeichnungen und Bezugsgrössen sind überall in die unsrigen umgeschrieben.

weiteren werden nach den Methoden der Hydraulik Ausströmung aus Öffnungen in dünner Wand, Energieverluste durch plötzliche Erweiterung und Kontraktion in Rohren, und ähnliches behandelt.

Um einen grossen Schritt wurde die Theorie zehn Jahre später, 1839, von den Ingenieuren *B. de Saint-Venant* und *L. Wantzel*[53]) gefördert. Sie berücksichtigen durch Verwendung des *Laplace-Poisson*schen Adiabatengesetzes $pv^{\varkappa} = \text{const.}$ die bei der Expansion eintretende Abkühlung des Gases und erhalten so die Formeln:

$$w = \varphi \sqrt{\frac{2g\varkappa}{\varkappa - 1} p_1 v_1 \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right)},$$

$$G = \mu F_0 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{\varkappa}} \sqrt{\frac{2g\varkappa}{\varkappa - 1} \frac{p_1}{v_1} \left(1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right)}$$

(φ und μ sind durch Versuche zu ermittelnde Korrektionsziffern). *De Saint-Venant* und *Wantzel* diskutieren die Beziehungen und finden, dass G als Funktion von p_2 (bei festgehaltenem p_1 und μ) ein Maximum bei dem Werte

$$p' = \left(\frac{2}{\varkappa + 1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} \cdot p_1$$

besitzt. Der Gedanke, dass es widersinnig ist, dass die Ausflussmenge abnehmen soll, wenn der Druck auf der Ausströmseite erniedrigt wird, führt sie auf den Gedanken, dass der Druck p in der Mündung bei grösseren Druckdifferenzen höher sein müsse, als der Aussendruck p_2, und jedenfalls nie unter den eben definierten Wert p' heruntersinken könne. Ihre Experimente (Einströmen der Luft in den Recipienten einer Luftpumpe) zeigen, obwohl die Messungen wegen Nichtbeachtung der auftretenden Temperaturdifferenzen mangelhaft sind, diese Annahmen bestätigt. (Zwischen $p_2 = 0$ und $p_2 = 0{,}4\ p_1$ war die Ausflussmenge konstant, nahm dann bei grösserem p_2 erst langsam, dann rascher ab.) Spätere Versuche von 1843[54]) an einem Dampfkessel gaben ähnliche Resultate.

Die Arbeit von *de Saint-Venant* und *Wantzel* geriet merkwürdiger Weise wieder in Vergessenheit. Zum Teil war daran wohl die schroffe Ablehnung schuld, welche ihr von *Poncelet*[55]) zu Teil wurde, der, auf Versuche von *Pecqueur* gestützt, die alte *Bernoulli*'sche Hypothese

---

53) Mémoire et expériences sur l'écoulement de l'air, Journ. éc. polyt. 27 (1839), p. 85.

54) Paris C. R. 18 (1843), p. 1140.

55) Paris C. R. 21 (1845), p. 178; Replik und Duplik p. 366 u. 387.

verteidigte. Ein anderer Grund mag darin liegen, dass *de Saint-Venant* und *Wantzel* zur Diskussion ihrer Versuchsergebnisse nicht ihre rationelle Formel verwendeten, sondern aus ihnen eine ziemlich willkürliche empirische Formel ableiteten.

Die rationellen Formeln für w und G wurden erst 1855 von *Jul. Weisbach*[56]) wieder gefunden und führten lange seinen Namen. *M. Herrmann*[57]) diskutierte 1860 das Maximum von G und deutete es, wie *de St. Venant* und *Wantzel*: der Mündungsdruck sinkt nie unter p' herab und die Geschwindigkeit steigt erst ausserhalb der Mündung unter Ausdehnung des Strahls auf den p_2 entsprechenden Wert.

In derselben Zeit (1856) kamen — wieder unabhängig von den bisherigen — *W. Thomson* und *Joule*[58]) von der Seite der Thermodynamik her zu einer Lösung des Ausflussproblems. Sie besitzen die Gleichung (d) in der auch bei beliebigen Widerständen giltigen Form

$$\frac{w^2}{2g} = u_1 - u_2 + p_1 v_1 - p_2 v_2 = \frac{\gamma p}{A}(T_1 - T_2)$$

und gewinnen hieraus ebenfalls die Formeln für w und G bei adiabatischer Expansion; sie bemerken dabei auch das Maximum von G.

Inzwischen war auch das adiabatische Ausströmen des Wasserdampfes in Angriff genommen. Nach der ersten Theorie von *Redtenbacher*[59]), 1855, die wegen fehlender Berücksichtigung der Condensation im expandierenden Dampf unrichtig war, wies 1860 *F. Grashof*[60]) auf den richtigen Weg. Durchgeführt wurde die Rechnung auf Grund unserer Formel (d) aus den Gesetzen für nasse Dämpfe (vgl. Nr. **6**) von *G. Zeuner* 1863[61]). Er erhält

$$A\frac{w^2}{2g} = \frac{x_1 \lambda_1}{T_1}(T_1 - T_2) + q_{p_1} - q_{p_2} - T_2(s_1'' - s_2'') + Av''(p_1 - p_2),$$[62])

wofür er für Überschlagsrechnungen noch die Näherungsformel

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{x_1 \lambda_1}{A T_1}(T_1 - T_2)$$

angiebt.

Das zur Berechnung des Ausflussgewichtes nötige Dampfvolumen wird aus der Gleichung der Adiabate ermittelt. Die Formeln werden

56) Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik, 3. Aufl. 1855, § 431.

57) Zeitschr. d. österr. Ing.-Ver. 12 (1860), p. 34.

58) London Proc. Roy. Soc. 8 (1856), p. 178.

59) Gesetze des Lokomotivbaues, Mannheim 1855, p. 34.

60) Zeitsch. d. Ver. deutsch. Ing. 4 (1860), S. 95.

61) Das Lokomotivblasrohr, Zürich 1863, p. 76 u. f.

62) In dieser Weise findet sich die Formel erst etwas später in der 2. Aufl. der „Grundzüge", p. 411.

für den Ausfluss von trocken gesättigtem Dampf, sowie von heissem Wasser (Kesselwasser)[63]) spezialisiert und durch Tabellen erläutert. Für letzteres findet er das merkwürdige Resultat, dass für Ausströmen in die Atmosphäre das sekundliche Ausflussgewicht für 1 qcm Öffnung fast unabhängig vom Kesseldruck ungefähr 0,11 kg betrage[64]).

Die *Theorie* des Ausströmens wurde nach der thermodynamischen Seite hin weiter gefördert von *Grashof*, der 1863 in der bereits zitierten grundlegenden Arbeit[37]) den Einfluss der durch die Widerstände hervorgerufenen Erwärmung des Gases richtig einschätzen lehrte, des weiteren von *Zeuner* 1871 in seiner „Neuen Darstellung der Vorgänge beim Ausfluss der Gase und Dämpfe aus Gefässmündungen“[65]). *Zeuner* berücksichtigt hier (bei Luft) den Einfluss der Widerstandsarbeit unter der Annahme, dass sie der Temperatursenkung, d. h. dem Zuwachs der kinetischen Energie proportional wäre:

$$dz = \zeta d\left(\frac{w^2}{2g}\right) = \zeta \frac{\gamma_p}{A} dT \quad \text{(vgl. p. 298)}.$$

Er erhält so als Gesetz der Zustandsänderung statt $pv^\varkappa = \text{const.}$ die Beziehung $pv^n = \text{const.}$, worin der „Ausflussexponent“ n mit dem Widerstandskoeffizienten ζ durch die Gleichung

$$n = \frac{(1+\zeta)\varkappa}{1+\zeta\varkappa}$$

zusammenhängt. Das Ausflussgewicht ergiebt sich hiernach zu

$$G = \alpha F_0 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1}{n}} \sqrt{\frac{2g\varkappa}{\varkappa-1}\frac{p_1}{v_1}\left(1-\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right)}.$$

Der Koeffizient α ist dabei durch den Zusammenhang zwischen dem freien Strahlquerschnitt F und dem Mündungsquerschnitt F_0 gegeben: $F = \alpha F_0$. *Zeuner* empfiehlt unterhalb

$$\frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{n+1}{2}\right)^{\frac{n}{n-1}} \quad \text{(kritisches Druckverhältnis)},$$

bei gut abgerundeten Mündungen $\alpha = 1$ zu setzen. Bei grösserem Druckverhältnis ist $\alpha > 1$ und es wird hierfür G unabhängig vom Aussendruck gleich dem Maximalwert

$$G = \alpha' F_0 \left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{\frac{2g\varkappa}{\varkappa-1}\cdot\frac{n-1}{n+1}\cdot\frac{p_1}{v_1}},$$

63) Zuerst im Civilingenieur 10 (1864), p. 87.

64) Neuere Untersuchungen führten zu andern Ergebnissen. Vgl. hierzu den Schluss dieser Nummer.

65) Civiling. 17 (1871), p. 71.

worin der neue Koeffizient α' für abgerundete Mündungen $= 1$ zu setzen ist. Für gesättigte Dämpfe, sowie auch für überhitzte schlägt er denselben Rechnungsgang vor[66]). Es ist dazu nur nötig, für die adiabatische Expansion einen mittleren Exponenten $\varkappa$ anzunehmen. Für gesättigten Wasserdampf giebt er an: $\varkappa = 1{,}035 + 0{,}10\, x_1$, wo x_1 die spezifische Dampfmenge beim Druck p_1 ist.

Für Ausfluss von trocken gesättigtem Dampf erhält man aus obiger Formel, wenn man das Volumen v_1 durch den Druck ausdrückt ($pv^{1{,}063} = \text{const.}$), nach *Grashof*[67]) die einfache Beziehung

$$G/\alpha' F_0 = C p^{0{,}96965};$$

die Konstante C ist für $\xi = 0$, wenn F_0 in m^2, p in kg/m^2, G in kg/sec gemessen wird, $C = 0{,}02018$.

Inzwischen waren von Verschiedenen *Versuche* zur Prüfung der Theorie und zur Gewinnung von Korrektionskoeffizienten unternommen worden.

Voranzustellen sind die vorzüglichen Versuche *Weisbach*'s von 1856, über die er 1859[68]) berichtet, deren Zahlenmaterial er aber erst 1866[69]) ausführlich mitgeteilt und bearbeitet hat. Seine Versuche, mit in einem Kessel komprimierter Luft angestellt, waren dadurch wesentlich vollkommener als die der früheren Experimentatoren, dass *Weisbach* bei den Druckablesungen, aus denen die Ausflussmengen bestimmt wurden, jedesmal den Ausgleich der bei der Expansion entstehenden Temperaturdifferenzen abwartete. Ein Teil seiner Versuchsresultate, die sich auf sehr verschiedene Arten von Mündungen, mit und ohne Ansatzrohr, beziehen, wurde von *Grashof*[70]) einer verbessernden Neuberechnung unterzogen. Die Änderung des Ausflussgesetzes bei Überschreitung des kritischen Druckverhältnisses war *Weisbach* unbemerkt geblieben, seine Versuche reichten nur eben bis an diese Grenze. Das Verdienst, diese Dinge zuerst einwandfrei nachgewiesen zu haben, gebührt *R. D. Napier*[71]) (1866). Er stellt die Ergebnisse seiner Ausflussversuche mit Wasserdampf (abgerundete Mündungen) in folgenden zwei Formeln zusammen:

---

66) Vgl. auch die Darstellung in Therm. II, 1. Aufl. § 20 u. 22; 2. Aufl. § 21 u. 23.

67) Masch.-L. § 111.

68) Civiling. 5, p. 1.

69) Civiling. 12, p. 1 u. 77.

70) Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 7 (1863), p. 279; Masch.-L. 1875, p. 580.

71) On the velocity of steam and other gases, London 1866; Engineer 23 1867), p. 11.

$$\text{für } p_2 > \tfrac{1}{2} p_1 \text{ ist } \frac{G}{F_0} = \sqrt{\frac{2g}{1+\zeta} \cdot \frac{(p_1 - p_2) p_2}{p_1 v_1}},$$

$$\text{für } p_2 < \tfrac{1}{2} p_1 \text{ ist } \frac{G}{F_0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2g}{1+\zeta} \frac{p_1}{v_1}}.$$ [72])

Er hat auch zuerst[73]) den Druck in der Mündung experimentell ermittelt (durch Druckmessung an einer feinen Bohrung in der Ausflussmündung, vgl. Fig. 59) und damit die Annahme von *de Saint-Venant* und *Wantzel*, die er selbst nicht kannte, wohl bestätigt.

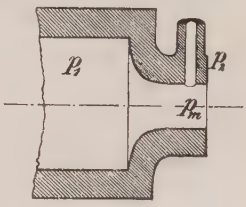


Fig. 59.

Als weitere Versuche über *Luft*ausfluss sind vor allem zu nennen die umfangreichen Versuche von *Zeuner* 1871[74]) und *Fliegner* 1874 und 1877[75]). In der letzteren Arbeit untersucht *Fliegner* auch den Einfluss der Wärmeleitung im Mundstück theoretisch sowohl als auch experimentell, er findet bei einem Mundstück aus Messing den Ausflussexponenten $n = 1{,}37$ ($\zeta = 0{,}077$), bei Buchsbaumholz $n = 1{,}395$ ($\zeta = 0{,}027$); aus diesen Zahlen schliesst er auf eine bedeutende Wirkung der Wärmeleitung. In sorgfältigen Beobachtungen des Mündungsdruckes p_m findet er, dass dieser nie unter den „kritischen Druck" herabgeht, und immer etwas höher als p_2 liegt. Als Näherungsformeln für gut abgerundete Metallmündungen empfiehlt er (p in kg/m², F in m²)

$$\frac{G}{F_0} = 0{,}76 \sqrt{\frac{(p_1 - p_2) p_2}{T_1}} \quad \text{für } p_2 > \frac{1}{2} p_1,$$

$$\frac{G}{F_0} = 0{,}38 \frac{p_1}{\sqrt{T_1}} \quad \text{für } p_2 < \frac{1}{2} p_1,$$

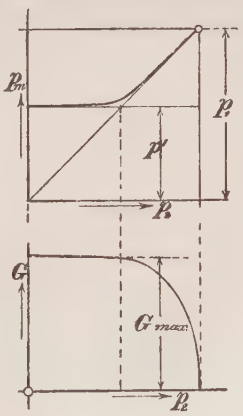


Fig. 60.

In Fig. 60 findet man die Ergebnisse der *Fliegner*schen Versuche veranschaulicht; es sind die Grössen p_m und G in ihrer Abhängigkeit von p_2 bei festgehaltenem p_1 dargestellt.

Erwähnenswert sind auch die sorgfältigen Versuche, die *G. A. Hirn* 1884[76]) mit Luft bei gewöhnlichen und höheren Temperaturen, sowie mit Kohlensäure und Wasserstoff angestellt hat. Er liess die Gase aus einem Gasometer

72) So sind die Formeln von *Zeuner* (Therm. II, § 24) umgeschrieben worden.

73) Engineer 28 (1869), p. 287. Vgl. auch *Rankine*, Engineer 28 (1869), p. 352 u. 358 = Civiling. 16 (1870), p. 35.

74) Vorläuf. Bericht Civiling. 20 (1874), p. 1. (Dort ist auch die Priorität von *de Saint-Venant* und *Wantzel* wieder aufgedeckt.) Ausführlicher in Therm. I (1. Aufl.), § 49—51.

75) Civiling. 20, p. 13 und Civiling. 23, p. 443.

76) Brüssel Mem. Acad. Roy. 156 (1886), Nr. 3; Ann. chim. phys. (6) 7

in einen evakuierten Raum einströmen und erreichte dadurch eine sehr einwandfreie Messung der Ausflussmengen. Die *Hirn*'schen Versuche bestätigen die früheren Ergebnisse; sonderbarer Weise glaubte *Hirn* selbst, indem er die Geschwindigkeit auch über das kritische Druckverhältnis hinaus mit der Formel $w = Gv_2/F$ berechnete, einen Widerspruch zwischen Theorie und Versuch nachgewiesen zu haben; seine Ansicht wurde von *Hugoniot*[77]) und *Parenty*[78]) 1886 widerlegt.

Parenty hat später[79])[80]), auf den *Hirn*'schen Versuchen fussend, eine empirische Näherungsformel von grosser Allgemeinheit angegeben. Er stellte fest, dass die Ausflussmenge G in ihrer Abhängigkeit von p_2 (vgl. Fig. 60) sehr nahe durch einen Ellipsenquadranten und dessen horizontale Tangente dargestellt werden kann. Es möge nun das Verhältnis $(p_1 - p_2)/p_1 = \delta$ und $(p_1 - p')/p_1 = \delta'$ gesetzt werden (p' = kritischer Mündungsdruck), ferner sei α_0 der Kontraktionskoeffizient, der der Mündung für Wasserausfluss unter Wasser zukommt; dann ist nach *Parenty* für beliebige Mündungen das Produkt $\delta' \cdot \alpha_0$ eine Konstante, ferner $G_{\max}$ proportional $\sqrt{\alpha_0}$; die Konstanten werden so bestimmt, dass für $\alpha_0 = 1$ der adiabatische Ausfluss erhalten wird. Mit

$$\delta' \cdot \alpha = \delta_0' = 1 - \left(\frac{\varkappa + 1}{2\varkappa}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}} \quad \text{(vgl. p. 297)}$$

wird

$$\text{für } \delta < \delta' : \frac{G}{F} = 2\alpha_0 \sqrt{g\delta_0' p_1 v_1 \cdot \delta \left(1 - \frac{\alpha_0}{2}\frac{\delta}{\delta_0'}\right)},$$

$$\text{für } \delta > \delta' : \frac{G}{F} = \delta_0' \cdot \sqrt{2\alpha_0 g p_1 v_1};$$

von den Koeffizienten δ_0' und α_0 der vorstehenden Formeln hängt der eine nur von der Gasart ab, der andere nur von der Mündungsform. Neuerdings hat *Parenty* an Hand der *Rateau*'schen Versuche (s. u.) die Anwendbarkeit seiner Formeln für Dampfausfluss gezeigt[81]). Ferner hat *Boussinesq*[82]) gezeigt, dass — für adiabatischen Ausfluss — eine Reihenentwicklung nach δ die *Parenty*'sche Ellipsenformel als zweite, bereits sehr befriedigende Näherung ergiebt.

(1886), p. 289; Recherches expérimentales sur la limite de vitesse que prend un gaz etc., Paris 1886.

77) Paris C. R. 102 (1886), p. 1545.

78) Paris C. R. 103 (1886), p. 125.

79) Paris C. R. 113 (1891), p. 184; 116 (1893), p. 1120; 119 (1894), p. 419.

80) Ann. chim. phys. (7) 8 (1896), p. 5.

81) Ann. des mines (10) 2 (1902), p. 403.

82) J. des Mathem. (5) 10 (1904), p. 79.

In neuerer Zeit (1897) hat auch *Zeuner*[83]) Luftausflussversuche mit einem Vakuumkessel gemacht, die ihn zu einer neuen Hypothese geführt haben; besonders Versuche mit grossen Widerständen führen ihn auf die Beziehung, „dass die Luft in den leeren Raum mit der dem Zustande der Luft in der Mündung entsprechenden Schallgeschwindigkeit $w_s = \sqrt{\varkappa g p v}$ ausströmt, welche Widerstände hierbei auch beim Hinströmen nach der Mündung vorliegen mögen". Diese Geschwindigkeit ergiebt sich aus (d) zu

$$w_s = \sqrt{\frac{2g\varkappa}{\varkappa+1} p_1 v_1}.$$

Die Ausflussmenge wird hierbei

$$G = F_0 \left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{1}{n-1}} \sqrt{\frac{2g\varkappa}{\varkappa+1} \frac{p_1}{v_1}}.$$

Wie *W. Schüle*[84]) nachwies, ist das Maximum der älteren *Zeuner*'schen Formel, die unter dem kritischen Druckverhältnis weiter gelten sollte, grösser als der vorstehende Wert; man kann indes diesen Wert durch verschiedenes n in beiden Formeln mit dem Maximum zusammenfallen lassen. — *Zeuner*'s Versuche ergaben — für Druckverhältnisse über dem kritischen Wert — den Ausflussexponenten n zu 1,375 bis 1,38; dieses entspricht Werten von $\zeta = 0{,}065$ bis 0,055.

Über den Ausfluss von *Dampf*[85]) sind nach *Napier* von Verschiedenen Versuche angestellt worden. So hat *Zeuner* 1870 Ausflussversuche mit Hilfe eines Injektors (Dampfstrahlpumpe) gemacht (erst 1890 veröffentlicht[86]). Ferner sind zu erwähnen die Versuche von *C. H. Peabody* und *L. H. Kuhnhardt*[87]) (mit Messung des Mündungsdruckes), von *Parenty*[80]), von *Rosenhain*[88]) (mit Messung der Reaktion der ausfliessenden Strahlen, bei verschiedenen Mündungen, auch konisch erweiterten Rohren, vgl. Nr. **20**), von *Gutermuth* und *Blaess*[89]) (mit verschiedenen Mündungen, Röhren und Düsen, wie sie bei Dampf-

83) Therm. I (2. Aufl.), p. 242 u. 256.

84) *Dingler*'s Polyt. Journ. 318 (1903), p. 355, 369 u. 388.

85) Ein zusammenfassender Bericht über ältere Versuche (auch solche mit Luft) findet sich bei *R. Kolster*, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 11 (1867), p. 433 u. 711 u. 12, p. 97. Besonders genannt seien die Versuche von *Tremery*, Ann. des mines (3) 20 (1841), p. 343) und von *Minary* und *Résal*, Ann. des mines (5) 19 (1861), p. 379 (deutsch im Civiling. 8 (1862), p. 101).

86) Therm. II, § 25.

87) Trans. Am. Soc. of Mec. Ing. 1890; Bericht im Engineering 49 (1890), p. 64.

88) Proc. Instit. of Civ. Ing. 140 (1900), p. 199.

89) Phys. Ztschr. 4 (1902), p. 82; Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 48 (1904), p. 75 = Forschungsarb. Heft 19 (1904), p. 45.

turbinen und bei den Schiebern der Dampfmaschinen in Verwendung stehen). Diesen Versuchen, bei denen die Ausflussmengen durch die kondensierten Wassermengen gemessen wurden, stehen Versuche von *A. Rateau*[90]) gegenüber, bei denen die Dampfmengen durch die an das Kühlwasser abgegebenen Wärmemengen bestimmt wurden. Durch gleichzeitige Messung der Dampffeuchtigkeit können diese Versuche für besonders zuverlässig gelten; sie liefern das Resultat, dass die Ausflussmengen für abgerundete Mündungen bei grossen Druckunterschieden sehr gut durch die Formeln für verlustlose Strömung dargestellt werden; die *Rateau*'sche Formel

$$G/\alpha' F_0 = p_1 (0{,}01904 - 0{,}00096 \log^{10} p_1),$$

wo p und F_0 auf Metermass bezogen sind, stimmt sehr genau mit der *Grashof*'schen Formel p. 300 überein; die älteren Versuche hatten, wohl durch mangelnde Trockenheit des Dampfes entstellt, grössere Werte ergeben. Für mässige Druckunterschiede liegen die *Rateau*schen Zahlen bis zu 5% unter den theoretischen Werten.

Bemerkenswert ist auch die von *Rateau* gefundene Thatsache, dass der Kontraktionskoeffizient für Öffnungen in dünner Wand, dargestellt durch das Verhältnis der hier auftretenden Ausflussmenge zu der bei abgerundeter Öffnung, sowohl für Dampf als auch für Gase (Versuche von *Hirn*) bis zu Drucken $p_2 = 0{,}45\, p_1$ herab sehr genau eine lineare Funktion des Druckverhältnisses ist, z. B. für Dampf

$$\alpha_1 = 0{,}645 + 0{,}35\,(p_1 - p_2)/p_1.$$

Ausfluss von heissem Wasser. Über den Ausfluss von Wasser aus dem Wasserraum eines Dampfkessels — also Wasser von der dem Druck p_1 entsprechenden Siedetemperatur — wurden von den Ingenieuren *Pulin* und *Bonnin* 1890 Versuche angestellt, über die *Sauvage*[91]) berichtet hat. Die Ergebnisse weichen vollständig von den theoretischen Resultaten *Zeuner*'s[63]) ab, die Ausflussmengen waren 10—12mal so gross, als die theoretischen. *Zeuner*[92]) erklärte später die Differenz durch die Annahme einer verzögerten Verdampfung des Wassers, wodurch der Ausflussvorgang sich mehr dem Ausfluss kalten Wassers nähere.

Neuerdings haben unabhängig voneinander *A. Rateau*[93]) und *A. Fliegner*[94]) nachgewiesen, dass man unter Beachtung des *de Saint-*

90) Rev. de mécanique 7 (1900), p. 167; Ann. des mines (10) 1 (1902), p. 5.
91) Ann. des mines (9) 2 (1892), p. 192.
92) Therm., 2. Aufl., § 22.
93) Rev. de mécanique 9 (1901), p. 660 = Ann. des mines (10) 1 (1902), p. 59.
94) Schweiz. Bauztg. 45 (1905), p. 282 und 306.

Venant-Wantzel'schen Prinzipes bedeutend höhere Ausflussmengen erhält, als *Zeuner* gefunden hatte. Nach *Fliegner* ergiebt sich z. B. für $p_1 = 6$ atm (absolut) das Maximum der Ausflussmenge für 1 qcm Öffnungsquerschnitt zu 0,42 kg/sec bei einem Mündungsdruck $p' = 5{,}4$ atm, während *Zeuner* unter Annahme eines Mündungsdruckes von 1 atm die Zahl 0,108 erhalten hatte.

Beide Autoren zeigen ferner, dass sich noch viel grössere Ausflussmengen ergeben, wenn man annimmt, dass die Temperatur des ausfliessenden Wassers um einige Grade unter dem dem Kesseldruck entsprechenden Siedepunkt liegt; *Rateau* und *Fliegner* verwerten dieses Ergebnis zu einer Erklärung der auch gegen ihre Zahlen noch dreimal grösseren Versuchswerte von *Pulin* und *Bonnin*. *Fliegner* berechnet u. a., dass bei 6 atm Dampfspannung für die Verdreifachung der Ausflussmenge 6^0 Temperaturerniedrigung ausreichend sind. Indes zeigen neue, noch unveröffentliche Versuche von *J. Adam*[95]), dass die *Zeuner*'sche Erklärung durch verzögerte Verdampfung die zutreffendere ist. *Adam* findet bei vergleichenden Versuchen mit heissem und kaltem Wasser, dass das Verhältnis der Ausflussmengen von heissem und kaltem Wasser (bei 6 atm) von 0,91 bei Öffnungen in dünner Wand bis auf 0,56 bei kurzer abgerundeter Mündung und weiter auf 0,44 bei einem mässig langen Ansatzrohr herabsinkt.

19. Strömungswiderstände. Man pflegt die bei den Strömungsbewegungen auftretenden Widerstände in kontinuierlich verteilte und in konzentrierte einzuteilen, je nachdem es sich um die hemmende Wirkung eines längeren Rohres oder einer örtlichen Unregelmäßigkeit (plötzliche Verengung, Erweiterung, Richtungsänderung usw.) handelt. Das übliche Mass für den Widerstand bildet die durch Gl. (b) definierte Widerstandshöhe z, bezw. ein durch Vergleich mit der Geschwindigkeitshöhe $w^2/2g$ gewonnener Widerstandskoeffizient.

a) Über die *konzentrierten Widerstände* ist, abgesehen von den im vorigen Abschnitt behandelten Ausflusswiderständen, wenig Litteratur vorhanden. Ein Versuch, die Vorgänge bei plötzlichen Verengungen und Erweiterungen eines Rohres zu berechnen, findet sich bereits bei *Navier*[51]). Er glaubt jedoch, die Widerstandshöhe bei plötzlicher Rohrerweiterung einfach, wie bei inkompressiblen Flüssigkeiten[96]), als *Carnot*'schen Stossverlust

$$z = \frac{(w_1 - w_2)^2}{2g}$$

95) Ausgeführt im Laboratorium für technische Physik zu München.

96) Vgl. Encykl. IV 20, 7 (*Forchheimer*).

setzen zu dürfen. Erst *Grashof*[97]) zeigte 1875, dass man bei kompressiblen Flüssigkeiten im Falle einer plötzlichen Rohrerweiterung

$$z = \frac{(w_1 - w_2)^2}{2g} + p_1 (v_1 - v_2) + \int_1^2 p dv$$

setzen müsse. Im besonderen entwickelte er[98]) unter Berücksichtigung der Wärmevorgänge die Formeln für einen Widerstandskoeffizienten, der nach dem Muster der Hydraulik

$$\zeta = \frac{2gz}{w^2}$$

gesetzt wird, unter der vereinfachenden Annahme, dass die Zustandsänderung während der Einwirkung des Widerstands als eine Polytrope $pv^m = \text{const.}$ angenommen werden darf. Mit diesen Formeln unterzieht er einige Versuche von *Weisbach*[68])[69]) über Knieröhren usw. einer Neuberechnung. Er entwickelt auch die Beziehungen für den Widerstand einer plötzlichen Verengung mit darauffolgender Erweiterung und erläutert die ziemlich verwickelten Formeln durch Zahlenbeispiele.

Anmerkung. Mit der eben besprochenen Aufgabe ist durch die Art der Behandlung (Anwendung des Satzes von der Bewegungsgrösse[99])) die Theorie der *Strahlapparate* verwandt. Es gehört zu diesen das Lokomotivenblasrohr (vgl. hierüber die Monographie von *Zeuner*[61])), ferner das Dampfstrahlgebläse; grosses theoretisches Interesse bietet auch die Dampfstrahlpumpe von *Giffard* (der sogenannte Injektor, dessen wärmetheoretische Analyse auch von *Zeuner*[100]) gegeben worden ist), sowie der Strahlkondensator von *Körting*.

Die Behandlung dieser Dinge musste hier unterbleiben, da eine Anzahl Beziehungen, die besser in die Referate über Hydraulik passen, hierzu hätten erörtert werden müssen. Die Eigenart der vorgenannten Apparate erlaubt fast durchgängig, die wärmetheoretische Bestimmung der in ihnen auftretenden Mischungsvorgänge, ohne Hinzunahme der Dynamik, vorweg zu behandeln. In dynamischer Beziehung unterscheiden sie sich in nichts anderem von den im Artikel IV **21** (*Grübler*) zu behandelnden Strahlpumpen, als dass das Mischungsvolumen nicht gleich der Summe der zuströmenden Volumina ist, sondern sich durch die vorhergehende thermische Untersuchung bestimmt.

97) Masch.-L. § 76.
98) Masch.-L. § 108.
99) Encykl. IV 20, 2b (*Forchheimer*).
100) Civiling. 6 (1860), p. 311; vgl. auch p. 322.

b) Die *kontinuierlichen Widerstände* werden hier durchgängig nach dem in der Hydraulik üblichen Ansatze[101])

$$dz = \zeta_1 \frac{w^2}{2g} dx$$

in Rechnung gesetzt; dx bedeutet dabei ein Längenelement in der Rohraxe gemessen, ζ_1 einen Widerstandskoeffizienten, der zumeist als Funktion des Rohrquerschnitts angesehen wird, manchmal aber als auch von der Geschwindigkeit abhängig betrachtet wird. *Girard*[102]), *Navier*[51]) und andere setzten, ganz entsprechend den Ansätzen in der Hydraulik $\zeta_1 = \beta \times$ Umfang : Fläche des Querschnitts, also für den Kreisquerschnitt (Durchmesser d)

$$\zeta_1 = \frac{4\beta}{d}.$$

Bezüglich der Werte von β (eine reine Zahl) ergeben die verschiedentlich angestellten Versuchsreihen sehr widersprechende Resultate. Während ältere Experimente[103]) sowie auch neuere von *Zeuner*[104]) für Rohrdurchmesser von $0{,}5 \sim 3$ cm β ziemlich konstant $= 0{,}00594 \sim 0{,}0064$ ergeben, zeigen andere Versuche merkliche Abhängigkeit vom Durchmesser und von der Geschwindigkeit; die von *Grashof*[105]) neuberechneten Versuche von *Weisbach*[68])[69])

$$(d = 1 \sim 2{,}5 \text{ cm}, \quad w = 30 \sim 110 \text{ m/sec})$$

werden gut durch die Formel

$$\beta = \frac{0{,}0028}{d^{0{,}36} w^{0{,}1675}}$$

dargestellt (d und w in Metern). Die Versuche an technischen Druckluftleitungen[106]) ($d = 7 \sim 30$ cm) ergaben β unabhängig von w, nämlich

$$\beta = \frac{0{,}00242}{d^{0{,}31}}.$$

Ein ähnliches Gesetz wurde übrigens auch schon früher (für $d = 1 \sim 3$ cm) von *Pecqueur*[55]) gefunden: $\beta = \text{const}/d^{\frac{1}{3}}$. In den theoretischen Arbeiten über die Strömung mit Widerständen (vgl. hierüber den folgenden Abschnitt), wird ζ_1 ausnahmslos als unabhängig von der Geschwindigkeit, also als Funktion des Durchmessers allein eingeführt.

---

101) Encykl. IV 20, 4 (*Forchheimer*).

102) Ann. chim. phys. 16 (1821), p. 129 = Ann. Phys. Chem. (2) 2 (1824), p. 59.

103) Vgl. [50]) (*Aubuisson, Buff*), [55]) (*Pecqueur*).

104) Therm. I, 2. Aufl., § 48.

105) Masch.-L., § 106.

106) Eine Zusammenstellung davon findet sich bei *H. Lorenz*, Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 36 (1892), p. 621 u. 835.

20. Strömung durch Röhren und Düsen[107]). Die verlustfreie Strömung durch Röhren von veränderlichen Querschnitt ist bereits in Nr. **17** besprochen. Hier handelt es sich also um das Studium der durch Widerstände beeinflussten Bewegungen. Die kontinuierlichen Widerstände werden in der in voriger Nummer dargelegten Weise in Ansatz gebracht; der Koeffizient ζ_1 pflegt dabei als eine im übrigen beliebige Funktion des Rohrdurchmessers betrachtet zu werden.

Schliesst man Wärmeleitung aus[108]), so lauten die Grundgleichungen (a), (b) und (d) hier:

$$Gv = Fw, \tag{a}$$

$$w\,dw + g\,v\,dp + \zeta_1 \frac{w^2}{2} dx = 0, \tag{b}$$

$$w^2 = 2g(i_1 - i); \tag{d}$$

i_1 ist dabei die Erzeugungswärme im Anfangszustand $p_1 v_1$, bei welchem $w = 0$ ist. Ist i als Funktion von p und v gegeben, so lassen sich aus Gl. (a) und (d) bei bekanntem p, F und G die Grössen v und w bestimmen, eine für Auswertung von Versuchen sehr nützliche Beziehung[109]). Hat man hierdurch v und w kennen gelernt, so liefert Gl. (b) Aufschluss über ζ_1.

Durch Elimination von dv und dw kann $\frac{dp}{dx}$ als Funktion von p, v, ζ_1 und $\frac{1}{F}\frac{dF}{dx}$, oder, nach Vorstehendem, wenn noch F und ζ_1 als Funktionen von x gegeben sind, als Funktion von p, x und G erhalten werden. Für ein gegebenes G lässt sich also die Aufgabe auf die Lösung einer Differentialgleichung $\frac{dp}{dx} = f(p, x)$ zurückführen.

Diesen Weg haben *H. Lorenz*[110]) und *L. Prandtl*[111]) — unter der vereinfachenden Annahme des Gasgesetzes — beschritten. In seiner allgemeinen Bedeutung scheint er von *A. Stodola*[112]) zuerst klar erkannt worden zu sein. Auf demselben Gedanken beruht auch das

---

107) Vgl. hiermit Encykl. IV 20 (*Forchheimer*) **5** b) und d).

108) Auf die *Grashof*'sche Theorie der Luft- und Dampfbewegung in Röhren mit Wärmeleitung ist schon hingewiesen worden[38]). Die Besprechung der ziemlich verwickelten Rechnungen mag hier unterbleiben, da sich weitere Arbeiten nicht daran angeknüpft haben.

109) Anscheinend unabhängig von *Stodola*[112]) und *Büchner*[42]) gefunden; in etwas anderer Weise von *A. Fliegner*[115]) benutzt.

110) Phys. Zeitschr. 4 (1903), p. 333 = Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 47, p. 1600.

111) Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 48 (1904), p. 348.

112) Dampfturb. § 26 (§ 7).

zeichnerische Verfahren von *G. Fanno*[113]), der im T-s-System mit Hilfe der Kurven $i = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ unter Anwendung von Gl. (a) und (d) Kurven $\frac{G}{F} = \text{const.}$ ermittelt, und dann für eine gegebene Röhre u. s. w. die zu einem bestimmten G gehörige Zustandskurve durch schrittweises Vorgehen gewinnt.

Für permanente Gase findet man mit $i = \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} pv$, dass hier w einfach als Funktion von $\frac{pF}{G}$ dargestellt werden kann. Zur Diskussion von $\frac{dp}{dx}$ wird zweckmässig die dem jeweiligen Zustande p, v entsprechende Schallgeschwindigkeit $a = \sqrt{\varkappa g p v}$ eingeführt.

Erreicht die Strömungsgeschwindigkeit irgendwo die Schallgeschwindigkeit, so ist dies immer für den aus (d) erhältlichen unveränderlichen Wert

$$w = a' = \sqrt{\frac{2\varkappa}{\varkappa + 1} g p_1 v_1}$$

der Fall (*Zeuner*[83]), *Lorenz*[110])). Das am meisten Ausschlag gebende Glied der Formel für $\frac{dp}{dx}$ hat den Faktor

$$\frac{\frac{2}{F}\frac{dF}{dx} - \varkappa\zeta_1 \frac{w^2}{a^2}}{a^2 - w^2};$$

man sieht, dass $\frac{dp}{dx}$ sein Vorzeichen wechselt, je nachdem w kleiner oder grösser ist als die Schallgeschwindigkeit. Für $w = a$ wird $\frac{dp}{dx} = \infty$, wenn nicht gleichzeitig der Zähler des Bruches $= 0$ wird. Dies trifft indes regelmässig zu, wenn in einem Rohr mit stetig veränderlichem $\frac{dF}{dx}$ die Schallgeschwindigkeit im Sinne wachsender Geschwindigkeit überschritten wird. Die Einzelheiten dieses Wertes $\frac{0}{0}$ wurden von *R. Proell*[114]) einer genaueren Feststellung unterzogen. (Vgl. auch p. 312.)

Die vorstehenden Beziehungen haben spezielle Anwendung gefunden, einmal auf das gerade cylindrische Rohr, dann in neuester Zeit auf das kegelförmige Rohr und die *Laval*'sche Dampfturbinendüse. Um diese Beispiele sei deshalb die weitere Besprechung gruppiert.

a) *Cylindrisches Rohr.* Diese Aufgabe wurde, soweit es bei dem damaligen Stande der Kenntnisse möglich war, bereits von *Navier*[51]) 1829 gelöst. Er verwendet — neben den Gleichungen (a) und (b) —

113) Dampfturb. § 28.

114) Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 48, p. 349.

an Stelle der ihm unbekannten Gleichung (d) das einfache *Mariotte*sche Gesetz $pv = \text{const}$. Seine Formeln sind übrigens auch nach dem heutigen Standpunkte noch richtig, wenn man die Aufgabe so stellt, dass durch einen vollkommenen Wärmeaustausch mit der Umgebung das Gas in der Röhre auf konstanter Temperatur gehalten wird. *Navier* findet $p \cdot w = \text{const}$. und erhält durch Integration

$$g(p_1^2 - p^2) = \left(\frac{G}{F}\right)^2 p_1 v_1 \left(\zeta_1 x + 2\log\frac{p_1}{p}\right), \quad (p = p_1 \text{ für } x = 0),$$

woraus sich das Ausflussgewicht bei gegebener Druckdifferenz ergiebt. Für sehr lange Leitungen erhält man nach Unterdrückung von $\log\frac{p_1}{p}$ die Näherungsformel

$$p = p_1\sqrt{1 - \frac{{w_1}^2}{g p_1 v_1}\zeta_1 x}.$$

Die Strömung der Luft in einem Rohr ohne Wärmemitteilung wurde von *Grashof*[37]) 1863 untersucht. Mit der von *Zeuner*[83]) eingeführten Schallgeschwindigkeit $a' = \sqrt{\frac{2g\varkappa p_1 v_1 + (\varkappa-1){w_1}^2}{\varkappa+1}}$ erhält man

$$\frac{2\varkappa}{\varkappa+1}\zeta_1(l-x) = \frac{a'^2}{w^2} - 1 + 2\log\frac{w}{a'}.$$

Die Integrationskonstante l bedeutet die maximale beim Strömungszustand p_1, v_1, w_1 mögliche Rohrlänge. Für $x = l$ wird $w = a'$ und $\frac{dw}{dx} = \infty$. Der obiger Formel entsprechende Druckverlauf (aus Gl. (a) und (d) zu gewinnen) ist in Fig. 61 dargestellt; er ist durch Versuche von *Fliegner*[115]) und *Zeuner*[83]) gut bestätigt. Sobald der Aussendruck p_2 hinter dem Rohrende $\leqq p'$ ist, ist im Endquerschnitt $w = a'$.

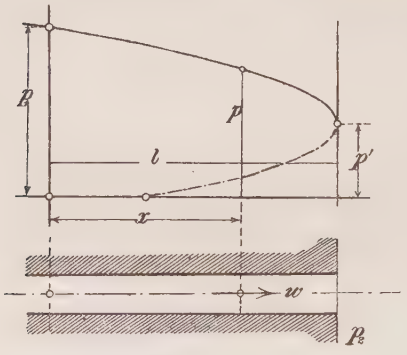


Fig. 61.

b) *Kegelförmiges Rohr.* Die Strömung eines Gases durch ein kegelförmig erweitertes Rohr wurde unter der Annahme eines konstanten Widerstandskoeffizienten β (vgl. Nr. **19** b) von *R. Proell*[116]) theoretisch behandelt. Ist der Radius eines Querschnitts $r = r_1 + \alpha x$, so ergiebt sich die Geschwindigkeitsverteilung aus der Formel

$$\frac{a'^2}{w^2}\left(\frac{w^2}{a'^2} - \varepsilon\right)^{1-\varepsilon} = \text{const.}\, r^4,$$

115) Schweiz. Bauzeitg. 31 (1898), p. 68, 78, 84.

116) Zeitschr. f. d. gesamte Turbinenwesen 1 (1904), p. 161 u. 2 (1905), p. 151.

wobei a' dieselbe Bedeutung wie im vorigen Absatz hat, und

$$\varepsilon = \frac{\alpha(\varkappa + 1)}{\alpha(\varkappa - 1) + \beta\varkappa}$$

ist. Eine Diskussion der *Proell*'schen Formeln ergiebt das bemerkenswerte Resultat, dass (bei hinreichend schlanken Kegeln) jedem Erweiterungsverhältnis α eine Geschwindigkeit $w' = a'\sqrt{\varepsilon}$ entspricht, die sich in der ganzen Erstreckung des Rohres konstant erhält. Ist $\alpha < \frac{1}{2}\beta\varkappa$, so ist $w' < a'$ und es treten für $w > w'$ ähnliche Verhältnisse auf wie beim cylindrischen Rohr (Zustreben der Geschwindigkeit auf die Schallgeschwindigkeit u. s. w.). Für $\alpha > \frac{1}{2}\beta\varkappa$, also $w' > a'$, nähert sich die Geschwindigkeit asymptotisch dem Wert w' oder Null, je nachdem sie grösser oder kleiner als a' ist. Für $\alpha = \frac{1}{2}\beta\varkappa$ $(w' = a')$ ergiebt sich bemerkenswerter Weise ein solcher Geschwindigkeitsverlauf, dass die Geschwindigkeit der Querschnittsfläche umgekehrt proportional ist; die zugehörige Zustandsänderung ist eine Kompression bei konstantem Volumen.

c) *Dampfturbinendüse von De Laval.* Um die im Dampf verfügbare Arbeit in möglichst regelmässiger Expansion in die kinetische Energie eines Dampfstrahls zu verwandeln, hat der schwedische Ingenieur *De Laval* 1889 eine Düse (Strahlrohr) angewandt, die hinter dem engsten Querschnitt kegelförmig erweitert ist.

Die Theorie der verlustfreien Strömung in derartigen Düsen ist bereits in Nr. **17** enthalten; vergl. auch *Zeuner*, Theorie der Turbinen[117]).

Für die praktische Berechnung der mit gesättigtem und überhitztem Wasserdampf betriebenen Düsen hat *R. Proell*[118]) eine nach *d'Ocagne*'schen Methoden[119]) entworfene graphische Rechentafel herausgegeben. Eine graphische Konstruktion mit Hilfe des T-s-Diagramms, die auch eine summarische Berücksichtigung der Widerstände erlaubt, wurde von *A. Koob*[120]) angegeben.

Zur Untersuchung der Strömung mit Widerständen kann man (nach *Prandtl*[111]) in dem Koordinatensystem von p und x die zu einem bestimmten Wert von G gehörigen Kurven gleicher Geschwindigkeit zeichnen (vgl. p. 308) — die gestrichelten Linien in Fig. 62 — und dann für eine Anzahl über die Ebene verteilter Punkte die Richtung

117) Leipzig 1899, p. 267 u. f.
118) Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 48 (1904), p. 1418.
119) Vgl. Encykl. I F **46** von *Mehmke*.
120) Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 48 (1904), p. 275, 660, 754.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{dp}{dx}$ auftragen, woraus sich die Strömungskurven — die ausgezogenen Linien — ergeben.

Für den Doppelpunkt dieser Kurvenschar tritt der p. 309 erwähnte Fall $\frac{0}{0}$ ein. Für den Anfangsdruck p_1, dem kleinsten, bei dem die Menge G noch durch die Düse getrieben werden kann, ergeben sich wieder zwei verschiedene Enddrücke p_o und p_u.

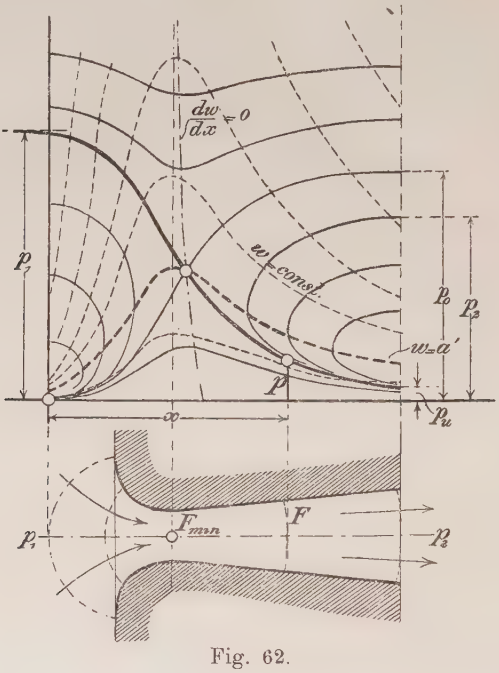


Fig. 62.

Versuche von *A. Fliegner*[115]), *A. Stodola*[41])[121]) und *K. Büchner*[122]) haben gezeigt, dass sich bei Gegendrücken p_2 zwischen p_o und p_u ein Übergang von der stark gezeichneten Linie zu der auf p_2 führenden einstellt. Dieser Übergang wurde von *Stodola*[121]) als „*Verdichtungsstoss*" gedeutet (entsprechend den *Riemann*'schen Diskontinuitäten bei Luftwellen mit endlichen Druckunterschieden)[123]).

Ist bei einem *stationären Verdichtungsstoss* der Zustand vor der Diskontinuität (p', v', w') gegeben, so ergiebt sich daraus nach *Stodola* der Zustand nach dem Stoss (p'', v'', w'') aus den Gleichungen:

121) Dampfturb. § 24 (§ 4).

122) Dessen Abhandlung[42]) enthält auch eine Zusammenstellung verschiedener früherer Versuche.

123) Encykl. IV 19, 8 (Art. *Zemplén*).

(a*) $$\frac{w'}{v'} = \frac{w''}{v''},$$

(b*) $$\frac{w'^2}{v'} - \frac{w''^2}{v''} = g(p'' - p'),$$

(d*) $$w'^2 - w''^2 = 2g(i'' - i').$$[124])

In ihrer Anwendung auf permanente Gase wurde die Theorie des Verdichtungsstosses von *Prandtl*[111]) und *Proell*[125]) weiter ausgearbeitet; u. a. ergibt sich, bei Einführung der Schallgeschwindigkeit a' (vgl. p. 309) die einfache Beziehung: $w'w'' = a'^2$; da immer $w' > w''$ ist, so folgt hieraus, dass zum Zustandekommen eines Verdichtungsstosses $w' > a'$ sein muss.

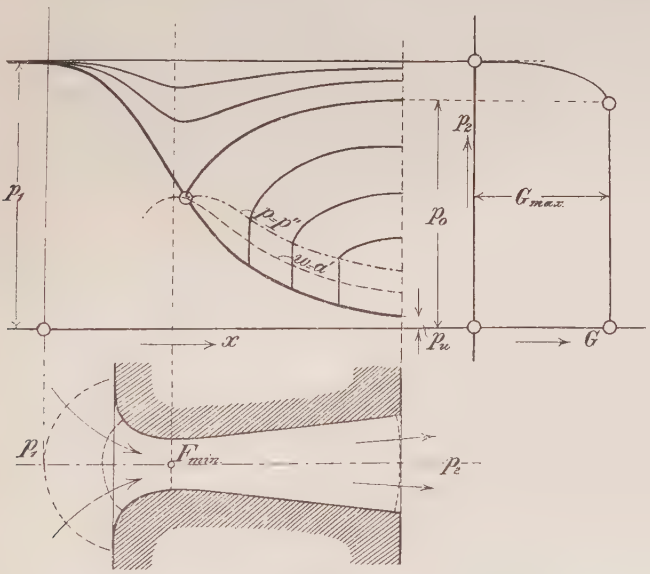


Fig. 63.

Die nach der vorstehenden Theorie für eine Lavaldüse bei einem bestimmten Anfangszustand p_1, v_1 sich ergebenden Druckkurven sind in Fig. 63 dargestellt. Das Ausflussgewicht G ist zwischen $p_2 = p_1$ und $p_2 = p_0$ veränderlich, für $p_2 < p_0$ konstant $= G_{\max}$ (was durch Versuche[89]) gut bestätigt ist).

Anm.: In cylindrischen Rohren sind für $w > a'$ ebenfalls Verdichtungsstösse möglich.

124) Bei *Riemann* selbst ist statt Gl. (d*) die Beziehung $p = \varphi(v)$ angenommen, was vom Standpunkt der Wärmetheorie aus unzulässig ist.

125) Zeitschr. f. d. ges. Turbinenwesen 1 (1904), p. 161.

21. Stationäre Wellen in einem freien Gasstrahl. *E. Mach* und *P. Salcher*[126]) entdeckten 1889 bei der optischen Untersuchung von Strahlen ausströmender Druckluft (Schlierenmethode) deutlich ausgeprägte stationäre Wellen. Die Erscheinung wurde später an Luft und anderen Gasen von *L. Mach*[127]) und *R. Emden*[128]), an Wasserdampf von *P. Emden*[129]), ebenfalls mit Hilfe von optischen Methoden genauer untersucht. Druckbeobachtungen sind von *Parenty*[130]) und *Stodola*[131]) gemacht worden. *Parenty* fand die Strahlform abhängig von dem Verhältnis $\frac{p'}{p_2}$ der Drücke in und vor der Mündung (über den Mündungsdruck p' vgl. p. 297). Im Einklang damit ist die von *R. Emden* (für kegelförmig verengte Mündungen, engster Durchmesser d') aufgestellte Gesetzmässigkeit zwischen der Wellenlänge λ und obigem Druckverhältnis:

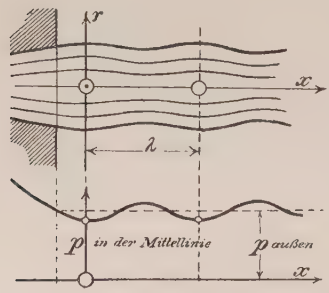


Fig. 64.

$$\lambda = 1{,}24\, d' \sqrt{\frac{p'}{p_2} - 1}.$$

Eine Theorie der Wellen mit sehr kleinen Amplituden gab *L. Prandtl*[132]). Er findet für einen Strahl von Kreisquerschnitt (Cylinderkoordinaten r und x, vgl. Fig. 64) das Strömungspotential

$$\varphi = \bar{w}x + a \sin \beta x J_0\left(\beta r \sqrt{\frac{\bar{w}^2}{a^2} - 1}\right).$$

Aus der Grenzbedingung ergeben sich die möglichen Wellenlängen zu

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{\beta_n} = \bar{d}\,\frac{\pi}{\alpha_n}\sqrt{\frac{\bar{w}^2}{a^2} - 1},$$

wobei $\bar{w}$ die mittlere Geschwindigkeit im Strahl, $\bar{d}$ den mittleren Strahldurchmesser und α_n die n^{te} Wurzel der *Bessel*'schen Funktion J_0 bedeutet. β_n ist mittels der letzten Gleichung durch α_n erklärt und für β ist in der vorletzten Gleichung einer der Werte β_n einzutragen.

126) Wien Ber. 98^{2a} (1889), p. 1303; Ann. d. Phys. (3) 41, p. 144.

127) Wien Ber. 106^{2a} (1897), p. 1025.

128) Über die Ausströmungserscheinungen permanenter Gase, Leipzig 1899. Auszüglich in Ann. d. Phys. (3) 69 (1899), p. 264.

129) Die Ausströmungserscheinungen des Wasserdampfes, Diss. Basel (München) 1903.

130) Paris C. R. 118 (1894), p. 183; Ann. chim. phys. 12 (1897), p. 289.

131) Dampfturb. § 35 (§ 11).

132) Phys. Zeitschr. 5 (1904), p. 599.

Aus dem Auftreten von stationären Wellen haben *Parenty*[130]), *R. Emden*[128]) und *A. Fliegner*[133]), indem sie dieselben als ebene Schallwellen betrachteten, geschlossen, dass der Strahl sich mit Schallgeschwindigkeit bewege und dass überhaupt die Geschwindigkeit eines stationären Gasstromes nicht über die Schallgeschwindigkeit hinauskommen könne[134]). Die Expansionsarbeit von p' (Mündungsdruck) bis p_2 (Aussendruck) sollte dabei vollständig in „Wellenenergie" verwandelt werden. Dem gegenüber lehrt die vorstehende Beziehung für die Wellenlänge, dass diese stationären Wellen, die im Gegensatz zu Schallwellen auch Transversalbewegung aufweisen, nur möglich sind, wenn die Strahlgeschwindigkeit $\overline{w}$ grösser als die Schallgeschwindigkeit ist.

Bei den beobachteten Wellen finden sich meist gut ausgeprägte Diskontinuitäten vor, die mit den *Mach*'schen Geschosswellen[135]) Ähnlichkeit haben. Aus ihren Winkeln lassen sich wie dort Schlüsse auf die Geschwindigkeit $w\,(>a)$ ziehen[126])[127])[111]). Dass die von der Theorie geforderten hohen Geschwindigkeiten wirklich erreicht werden (auch bei gewöhnlichen Mündungen durch Expansion hinter dem Ausflussrohr), ergiebt sich auch aus den Beobachtungen des Stossdruckes von Dampfstrahlen von *Delaporte*[136]) und *E. Lewicki*[137]).

Bemerkung. An dieser Stelle möge eine Untersuchung von *A. Stodola* und *A. Hirsch*[138]) über zweidimensionale Strömung eines Gases Erwähnung finden, in der unter der Annahme $pv = \text{const.}$ das Problem behandelt wird, dem bei inkompressiblen Flüssigkeiten die Strömung $X + iY = (x + iy)^n$ entspricht.

22. Überströmen. a) *Überströmen im Beharrungszustande.* Zur Herabminderung des Druckes eines Gases oder Dampfes beim Überströmen von einem Raum in einen zweiten (zum „*Drosseln*" desselben) werden Verengungen des Strömungsquerschnitts (durch Ventile, Klappen u. s. w.) angewandt. Ist die Geschwindigkeit weiter ab von der

133) Zürich Vierteljahrschr. Naturf. Ges. 47 (1902), p. 21; Schweiz. Bauzeitg. 43 (1904), p. 104 u. 140.

134) Die Ansicht, dass die Luft keine größere Geschwindigkeit als Schallgeschwindigkeit annehmen könne, wurde schon früher von *C. Holtzmann* (Lehrbuch des theor. Mechanik, Stuttgart 1861, p. 376) vertreten, mit der gleichfalls unzutreffenden Begründung, dass die Aussenluft nicht schneller als mit Schallgeschwindigkeit ausweichen könne.

135) Encykl. IV 18, 4, Fussnote 52 (*Cranz*).

136) Rev. de mécanique 10 (1902), p. 466.

137) Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 47 (1903), p. 441, 491, 525 = Forschungsarb. Heft 12, p. 73 u. f.

138) Dampfturb. § 95 (§ 35).

Verengung diesseits und jenseits gering genug, so dass die kinetische Energie dort ausser Betracht bleiben darf, so giebt Gleichung (d), wenn noch von Wärmezufuhr und Höhendifferenzen abgesehen wird:

$$i_1 = i_2.$$

Über den Anteil der „Drosselung“ am Kreisprozess der Kaltdampfmaschine vgl. Nr. **14**.

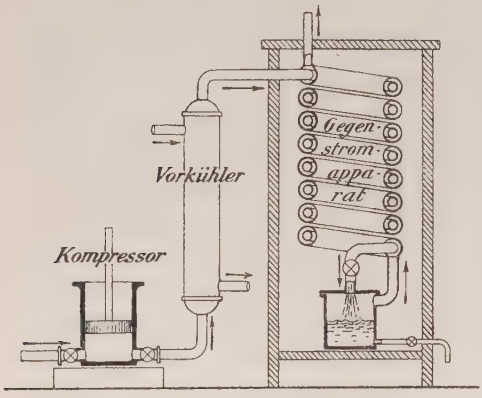


Fig. 65.

Bei idealen Gasen ergiebt sich mit $i = \gamma_p T$ aus dem Vorstehenden $T_1 = T_2$. *Joule* und *W. Thomson*[139]) fanden diese Beziehung in ihren bekannten „Versuchen mit dem Wattepfropfen“ bei den wirklichen Gasen nicht genau bestätigt; sie erhielten eine Abkühlung nach der Formel

$$\frac{dT}{dp} = \frac{C}{T^2}.$$

Für p in kg/m^2 ist bei Luft $C = 2$ zu setzen.

Diese Abkühlung bei Drosselung ist in dem Luftverflüssigungsverfahren von *Linde*[140]) technisch verwertet. Es wird hierbei (vgl. die Fig. 65) in einem Gegenstromapparat (Wärmeaustauscher) die unter einem sehr hohen Druck ankommende Luft durch die ihr entgegenkommende bereits entspannte Luft abgekühlt, so dass sich die Temperatur am untern Ende des Gegenstromapparates allmählich bis auf die Verflüssigungstemperatur erniedrigt.

b) *Überströmen bei konstantem Gefässvolumen.* Die Vorgänge beim Überströmen eines Gases oder Dampfes aus einem Gefäss in ein anderes, in dem der Druck geringer ist, wurden unter der Annahme, dass durch die Gefässwände keine Wärmeleitung stattfindet, und dass der augenblicklich mit wesentlicher kinetischer Energie behaftete Teil des Gases jederzeit nur einen zu vernachlässigenden Bruchteil der ganzen Gasmenge ausmacht, von *J. Bauschinger*[141]) 1863 einer ausführlichen Behandlung unterzogen (vgl. auch *Zeuner*, Therm. I,

139) Encykl. V 3, **23** (*Bryan*).

140) Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 39 (1895), p. 1157 (Vortrag von Schröter); Ann. Phys. Chem. (3) 57 (1896), p. 328, „Erzielung niedrigster Temperaturen“.

141) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 8 (1863), p. 81 u. 153 (Überströmen von Gasen), p. 429 (Überströmen von Wasserdampf). Dort findet sich weitere Litteratur.

§ 35, 37). Es seien V_1 und V_2 die beiden Volumina, G_1 und G_2 die anfänglichen Gas- (oder Dampf-) Gewichte[142]) in den Gefässen, G_x und G_y die augenblicklichen Gewichte.

Dann gelten die Beziehungen, dass das Gesamtgewicht und der gesamte Energiegehalt der beiden Gefässe konstant sind:

$$G_x + G_y = G_1 + G_2,$$
$$G_x u_x + G_y u_y = G_1 u_1 + G_2 u_2.$$

Ferner ist $G_x v_x = V_1$ und $G_y v_y = V_2$.

Im Ausflussgefäss findet adiabatische Expansion des jeweils zurückgebliebenen Gasquantums statt; hierdurch bestimmt sich sehr einfach die zu einem gegebenen augenblicklichen Druck gehörige Energie dieses Gefässes und damit nach obigem auch die zugehörige des zweiten Gefässes. In diesem wird die Energie durch das Einströmen der Menge dG_y um $dG_y\left(u' + p_y v' + \frac{w'^2}{2g}\right)$ vermehrt (u', v' im Strahl hinter der Mündung). Für die Veränderung von u in beiden Gefässen erhält man so (mit $dG = dG_y = -dG_x$)

$$du_x = -p_x v_x \frac{dG}{G_x}; \quad du_y = (p_x v_x + u_x - u_y)\frac{dG}{G_y}.$$

Ist $u = f(p, v)$ gegeben, so ergeben sich Gleichungen für p_x und p_y als Funktionen der Gewichte G. Die Einführung der Zustandsgleichung (Berechnung von T) lehrt, dass als Kompensation zu der adiabatischen Abkühlung im ersten Gefäss im zweiten eine erhebliche Temperatursteigerung eintritt.

Für das Ende des Überströmens, das sich in endlicher Zeit vollzieht (bei kleineren Druckunterschieden ist diese Zeit dem Ausdruck $\frac{V}{\mu F_0 \bar{p}}\sqrt{\frac{p_1 - p_2}{2g\bar{v}}}$ proportional[143])), wird $p_x = p_y$; für permanente Gase stellt sich hierbei als Enddruck ein

$$p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2}{V_1 + V_2}.$$

142) Hier nicht Gewichte pro Zeiteinheit, sondern einfach Gewichte!

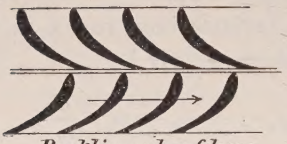
143) Über den zeitlichen Verlauf der Ausfluss- und Einströmungsvorgänge findet man Notizen bei *de Saint-Venant* und *Wantzel*[53]), *Weisbach*[56]), § 428, besonders aber bei *Grashof*, Masch.-L. § 121 u. 122; neuerdings bei *Schüle*[84]). An dieser Stelle mag auch Erwähnung finden, dass *Zeuner* in seinem „Lokomotivenblasrohr“[61]), p. 199 u. f. den zeitlichen Verlauf des Auspuffvorganges bei einem Dampfcylinder theoretisch verfolgt hat, unter Berücksichtigung der Veränderlichkeit der von der Steuerung dem Dampf dargebotenen Ausströmungsöffnung. — Der zeitliche Verlauf des Einströmens des Kesseldampfes in den Cylinder wurde neuerdings von *V. Blaess* (Zeitschr. d. Ver. deutsch. Ing. 49 (1905), p. 697) und

Als Spezialfälle des Vorstehenden sind besonders das Ausströmen eines komprimierten Gases in die freie Atmosphäre und das Eindringen von Luft in ein evakuiertes Gefäss von Bedeutung; im letzteren Falle wird die Temperatur im Gefäss

$$T_y = \varkappa T_1 - \frac{G_2}{G_y}(\varkappa T_1 - T_2);$$

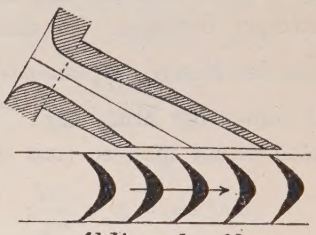
ist das Gefäss zuerst luftleer ($G_2 = 0$), so ergiebt sich das bemerkenswerte Resultat, dass T_y während des Einströmens konstant $= \varkappa T_1$ ist.

23. Dampfturbinen. Hier mögen einige Worte über diese Maschinen Platz finden, in denen die kinetische Energie des strömenden Dampfes nutzbar gemacht wird. Man unterscheidet wie bei den Wasserturbinen[144]) Reaktions- und Aktions-Turbinen (Überdruck- und



Reaktionsschaufelung.

Fig. 66.



Aktionsschaufelung.

Fig. 67.

Druck-Turbinen), je nachdem im Laufrade eine wesentliche Geschwindigkeitsvermehrung stattfindet oder nicht (vgl. Fig. 66 und 67). Eine weitere Unterscheidung ist die in einstufige und mehrstufige Turbinen, je nachdem das ganze Druckgefälle in *einem* Rad verarbeitet wird, oder der Dampf nach einander durch eine Reihe von Rädern tritt, und so seine Energie stufenweise abgiebt.

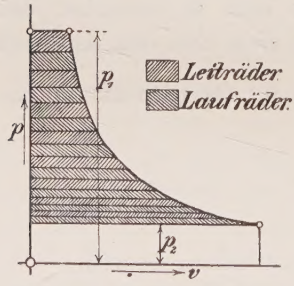


Fig. 68.

Neben Druckabstufung (Expansion von Rad zu Rad) findet man auch Geschwindigkeitsabstufung, wobei die in den Düsen erzeugte Geschwindigkeit in mehreren Rädern schrittweise verringert wird. Die Stufen werden angewandt, um die sonst sehr hohen Schaufelgeschwindigkeiten (200—400 m/sec) zu ermässigen.

Die Dampfarbeit lässt sich an der Hand der Diagramme von

P. Debye (Ber. d. Aachener Bez.-Ver. deutsch. Ing. 7. Juni 1905) behandelt und zu einer Theorie der Abmessungen der Steuerungskanäle verwertet.

144) Encykl. IV 21 (*Grübler*).

Nr. **16** zeichnerisch verfolgen; für verlustlosen Arbeitsvorgang entsprechen diese Diagramme genau denen für eine verlustlose Kolbendampfmaschine. Fig. 68 giebt das Diagramm einer vielstufigen Reaktionsturbine.

Die ersten technisch verwertbaren Turbinen waren die von *C. A. Parsons* (1885) — eine vielstufige Reaktionsturbine — und die von *G. De Laval* (1893)[145] — eine einstufige Aktionsturbine. In neuerer Zeit sind als vielstufige Aktionsturbinen mit Druckstufen die *Rateau-* und *Zoelly*turbine hinzugekommen. Eine Aktionsturbine mit Geschwindigkeitsabstufung ist die von *Curtis*.

Die Litteratur über Dampfturbinen, erst sehr spärlich, ist in den letzten Jahren stark im Zunehmen begriffen; den Lesern der Encyklopädie sei besonders das *Stodola*'sche Buch empfohlen, in dessen dritter Auflage (1905) die meisten neueren Arbeiten Berücksichtigung gefunden haben. Als kürzere zusammenfassende Aufsätze seien noch genannt die Abhandlung von *A. Rateau* in der Revue de mécanique 7 (1900), p. 167, ferner der Artikel „Dampfturbinen" in *Lueger*'s Lexikon der gesamten Technik, 2. Aufl. Stuttgart 1905, Bd. II, p. 624, von *R. Proell*. Besonders dieser letztere Aufsatz enthält zahlreiche Litteraturnachweise.

145) Die Jahreszahlen beziehen sich auf die erste Ausstellung der Maschinen.

(Abgeschlossen im Juli 1905.)

UNIVERSITY OF MAINE
3 7550 01697298 7

S0-GBH-000